Maatriksid, vektorid ja lineaarsed süsteemid

Massiivid. Vektoreid ja maatrikseid nimetatakse Matlab-Octaves massiivideks (ingl. arrays).

Ühtlase sammuga vektori saab luua järgmise käsuga:

vektori tähis=esimene element:samm:viimane element

Näiteks sisestades käsurealt

```
x=4:2:16
```

ja vajutades enterit kuvatakse ekraanile

```
x =
    4  6  8  10  12  14  16
```

See tähendab, et Matlab-Octave moodustas vektori x, mille esimeseks elemendiks on 4, viimaseks elemendiks 16 ja elemendid suurenevad ühtaselt sammuga 2. Kui samm on 1, siis võib selle käsus kirjutamata jätta. Näiteks käsud

```
b=2:1:7
```

ja

```
b=2:7
```

annavad ühe ja sama tulemuse

```
b =
    2  3  4  5  6  7
```

Üldisem massiivi sisestamise võimalus on selline, et kõik elemendid pannakse ükshaaval kirja. Seejuures tuleb elemendid paigutada kandiliste sulgude vahele, kusjuures reaelementide eraldamiseks saab kasutada koma või tühikut ning ridade eraldamiseks saab kasutada semikoolonit või enterit. Näiteks maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

saab sisestada tippides käsureale järgmised sümbolid:

```
A=[1,5,2;-3,0,7;1,12,6]
```

Peale enterile vajutamist kuvatakse

```
A =

     1    5    2
    -3    0    7
     1   12    6
```

Sama massiivi saaks sisestada ka tühikuid ja entereid kasutades, so järgmiselt:

```
A=[1 5 2 enter -3 0 7 enter 1 12 6]
```

Seejuures võib reaelementide vahele panna kuitahes palju tühikuid.

Reavektori $u = (1, 7, -4, 8)$ saab sisestada käsuga

```
u=[1,7,-4,8]
```

või

```
u=[1 7 -4 8]
```

ja veeruvektori $v1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 52 \end{pmatrix}$ käsuga

```
v1=[0;7;52]
```

või

v1=[0 enter 7 enter 52]

Transponeerimise käsk on ülakoma ' ja determinandi ning pöördmaatriksi leidmise käsud on vastavalt det ja inv . Näiteks eespoolsisestatud vektori u transponeerimiseks tipime käsureale u' ja vajutame enter. Kuvatakse vastus

ans =

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 8 \end{array}$$

Eespoolsisestatud maatriksi A determinandi arvutamiseks tipime käsureale det(A) ja vajutame enter. Matlab-Octave annab vastuse

ans=-31.000

Maatriksi A pöördmaatriksi arvutamiseks tipime käsureale inv(A), ja vajutame enter. Antakse vastus

ans =

$$\begin{array}{rrr} 2.70968 & 0.19355 & -1.12903 \\ -0.80645 & -0.12903 & 0.41935 \\ 1.16129 & 0.22581 & -0.48387 \end{array}$$

Tehted massiividega. Massiividega saab teha järgmisi aritmeetilisi tehteid:

$+$	liitmine (sooritatakse komponentide kaupa)
$-$	lahutamine (sooritatakse komponentide kaupa)
$*$	maatrikskorrutamine
$.*$	korrutamine komponentide kaupa
$/$	maatriksjagamine vasakult paremale
$./$	jagamine vasakult paremale komponentide kaupa
$\backslash$	maatriksjagamine paremalt vasakule
$.\backslash$	jagamine paremalt vasakule komponentide kaupa
ˆ	astendamine
.ˆ	astendamine komponentide kaupa

Lisaks on võimalik kasutada käske:
size – esitatakse massiivi suurus (ridade ja veergude arv)
length – esitatakse vektori suurus
ndims – esitatakse massiivi dimensioon
disp – vastuseks esitatakse massiiv
norm – massiivi norm
rank – maatriksi astak
trace – ruutmaatriksi jälg
lu – leitakse esialgse maatriksi $LU-$lahutus

Näiteks, kui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, siis

$$A{*}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

ja

$$A\,.{*}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 7 & 4 \cdot 8 \end{pmatrix}.$$

Maatriksjagamine on sama mis maatrikskorrutamine jagaja pöördmaatriksiga. Nimelt

$$A/B = A * B^{-1} \quad \text{ja} \quad A\backslash B = A^{-1} * B\,.$$

Maatriksjagamist või pöördmaatriksiga korrutamist kasutades on võimalik lahendada lineaarseid võrrandisüsteeme. Olgu antud järgmine lineaarne süsteem:

$$Ax = y.$$

Korrutame selle süsteemi vasakut ja paremat poolt A pöördmaatriksiga. Saame

$$A^{-1} * Ax = A^{-1} * y.$$

Kuna $A^{-1} * A$ on ühikmaatriks, siis kehtib $A^{-1} * Ax = x$ ning saame võrduse

$$x = A^{-1} * y,$$

mis on samaväärne võrdusega

$$x = A \backslash y.$$

Seega tuleb lineaarsüsteemi $Ax = y$ lahendamiseks sooritada üks järgmisest kahest tehtest: $x = A^{-1} * y$ või $x = A\backslash y$. Kumba neist kasutada, on maitse küsimus.

Näiteülesanne 1. Sisestada massiivid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

leida $B1 = A^2$, $B2 = A.*A$ ja lahendada süsteem $Ax = b$.

Lahendus. Sisestame skripti järgmise käskudejada:

```
A=[1,3,1;0,-1,1;1,0,5];
b=[1;3;2];
B1=A*A
B2=A.*A
x=inv(A)*b
```

kusjuures viimase käsu `x=inv(A)*b` asemel võib kirjutada `x=A\b` . Salvestame skripti ja käivitame Matlab-Octavest. Kuvatakse vastus

```
B1 =

     2   0   9
     1   1   4
     6   3  26
B2 =

     1   9   1
     0   1   1
     1   0  25

x =

    42
   -11
    -8
```

Mõnikord on arvutustes vaja kasutada mingit konkreetset massiivi elementi. Massiivi elemendile viitamisel tuleb indeks(id) panna massiivi tähise järgi sulgudesse komadega eraldatult. Näiteks kui Matlab-Octaves sisestada maatriks

```
B=[1 2 5
   4 3 7
   1 0 8]
```

ja tippides

B(2,3)

ning vajutades enter väljastatakse maatriksi B 2. rea ja 3. veeru element, st

```
ans =
     7
```

Sisestades vektori

```
c=[1,5,-6,2,3,9,10,4]
```

ja käsu

```
v=c(4)
```

saame vastuseks vektori c neljanda elemendi, st

```
v =
    2
```

Olgu vaja arvutada nende massiivide põhjal järgmine suurus: $z = B_{13} - 4c_6 + B_{33}B_{22}$. Seda saab teha järgmise käsuga:

```
z=B(1,3)-4*c(6)+B(3,3)*B(2,2)
```

Vastus on järgmine:

```
z =
   -7
```

Harjutusülesanne 1. Sisestada massiivid

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$x = (4, 3, 8, 0, 7)$, transponeerida B ja x ning leida B determinant ja pöördmaatriks. Vastav skript salvestada nime z10.m all.

Skript

Harjutusülesanne 2. Sisestada massiivid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

leida $B = A'$, $C = A/B + B^{-1}$ ja lahendada süsteem $Az = y$. Vastav skript salvestada nime z11.m all.

Skript

Harjutusülesanne 3. Lahendada järgmine lineaarne võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 3y_2 - 5y_1 + y_4 = 5, \\ -y_3 + y_1 - 4 = 0, \\ y_1 + y_2 = 7 \\ 5 - 3y_2 + y_3 = y_4. \end{cases}$$

Skript salvestada nime z12.m all.

Lahendus

Harjutusülesanne 4. Leida joonisel kujutatud kraana detailide pinged T_1, T_2, T_3 ja T_4 algandmete $M = 1000$kg, $\theta_1 = 65°$, $\theta_2 = 24°$, $\theta_3 = 64°$ ja $\theta_4 = 40°$ korral. Skript salvestada nime z13.m all.

Lahendus