TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 345 1973

УДК 519.48

Я. Хенно

СВОБОДНЫЕ Ω-СИСТЕМЫ

Пусть Ω – область (может быть, пустая) операторов, т.е. символов операции, Ω_m – совокупность всех m-арных операторов из Ω. Если $\zeta = \langle G, \Omega \rangle$ – универсальная алгебра с областью операции Ω (Ω-алгебра), то обозначим результат применения операции $\omega \in \Omega_m$, $m > 0$ к элементам $x_1, \ldots, x_m \in G$ через $\overset{\omega}{\sum} x_i$ (или через $x_1 \ldots x_m \omega$), а элемент, отмеченный в ζ операцией $\nu \in \Omega_0$, через 0_ν (иногда через 0_ν^ζ).

Пусть J – непустое подмножество множества всех целых неотрицательных чисел, $J \neq \{0\}$. Пусть $\bar{J} = J \setminus \{0\}$ (если $0 \notin J$, то $\bar{J} = J$). Назовем совокупность $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n, n \in J\}$ непересекающихся Ω-алгебр $\mathcal{A}_n = \langle A_n, \Omega \rangle$ Ω-системой (при $0 \notin J$ это определение приводит к рассмотренным в [1] Ω-системам Менгера), если для любых $n \in J$, $m \in \bar{J}$ всяких $x_1, \ldots, x_m \in A_n$, $y \in A_m$ сопоставлен элемент $x_1 \ldots x_m y \in A_n$ и выполняются тождества

$$x_1 \ldots x_m (y_1 \ldots y_l z) = (x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z, \tag{1}$$

$$x_1 \ldots x_m \overset{\omega}{\sum} y_i = \overset{\omega}{\sum} x_1 \ldots x_m y_i, \tag{2}$$

$$x_1 \ldots x_m 0_\nu^m = 0_\nu^n \tag{3}$$

при любых $x_i, 0_\nu^n \in A_n, n \in J$, $y_i, 0_\nu^m \in A_m$, $z \in A_l$, $m, l \in \bar{J}$, $\omega \in \Omega$.

Примерами Ω-систем являются полугруппы ($J = \{1\}, \Omega = \phi$), кольца ($J = \{1\}$, $\Omega = \{+, -\}$), полигоны ($J = \{0, 1\}$, $\Omega = \phi$). При $\Omega = \phi$, $0 \notin J$ Ω-система называется системой Менгера [1], при $J = \{m\} (m > 0)$ m-арным Ω-кольцоидом, при $J = \{m\}$,

$(m>0), \Omega=\phi$ m – полугруппой или оперативом Менгера.

Назовем Ω -систему $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_n,\ n\in J\}$ подсистемой Ω -системы $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_m, m\in \bar{J}\}$, если $J\leqslant \bar{J}$ все $\mathcal{A}_n$ являются Ω -подалгебрами в $\mathcal{B}_n$ и из $x_1,\dots,x_m\in A_n, n\in J$, $y\in B_m$, $m\in\bar{J}$ следует $x_1\dots x_m y\in A_n$.

Гомоморфизмом Ω -системы $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_n, n\in J\}$ в Ω -систему $B=\{B_m, m\in \bar{J}\}$ (гомоморфизм определен только при $J\leqslant\bar{J}$) называется такая совокупность $\tau=\{\tau_n,\ n\in J\}$ отображений $\tau_n:\mathcal{A}_n\to B_n$, что

$$(x_1\dots x_m y)^{\tau_n}=x_1^{\tau_n}\dots x_m^{\tau_n}y^{\tau_m}, \qquad (4)$$

$$(\sum^{\omega} x_i)^{\tau_n}=\sum^{\omega} x_i^{\tau_n}, \qquad (5)$$

$$0_\nu^{\tau_n}=0_\nu. \qquad (6)$$

Конгруэнцией Ω -системы $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_n, n\in J\}$ называется набор $\rho=\{\rho_n,\ n\in J\}$ конгруэнции ρ_n Ω -алгебр $\mathcal{A}_n$, если из $x_i, x_i'\in A_n$, $y, y'\in A_m$, $n\in J$, $m\in\bar{J}$, $x_i\rho x_i'$, $i=1,\dots,m$, $y\rho y'$ следует $(x_1\dots x_m y)\,\rho_n\,(x_1'\dots x_m' y')$.

Обычным образом определяется порожденная множеством X подсистема Ω -системы – это ее минимальная подсистема, содержащая X. Если X – порождающее множество Ω -системы $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_n,\ n\in J\}$, то $X_n=X\cap A_n\neq\phi$ при всяком $n\in J$, ибо если $X\subseteq\bigcup_{n\in J_1}A_n$, $J_1<J$, $J_1\neq J$, то X содержится в истинной подсистеме $\mathcal{A}_1=\{\mathcal{A}_n, n\in J_1\}$ системы $\mathcal{A}$ и, следовательно, не может быть порождающим множеством для $\mathcal{A}$.

Назовем Ω -систему $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_n, n\in J\}$ свободной (точнее, свободной в классе всех Ω -систем) над множеством образующих $X=\{X_n, n\in J\}$, $X_n\leqslant A_n$, если для всякой Ω -системы $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_n, n\in J\}$ любое отображение $\tau=\{\tau_n,\ n\in J\}$, $\tau_n: X_n\to B_n$ однозначно продолжимо до гомоморфизма $\rho(\tau):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$.

Пусть $X=\{X_n, n\in J\}$ – произвольное множество, в котором дано разбиение на непустые непересекающиеся подмножества X_n. Определим индуктивно множества $W_n(X)$ слов w (над X) и вес $h(w)$ каждого слова w.

<u>Определение I.</u>

I.1. При всяком $n\in J$ все символы $x\in X_n$ являются словами веса 1 из $W_n(X)$. При всяком $n\in J$ и для всякого $\nu\in\Omega_0$ символ 0_ν^n является словом веса 1 из $W_n(X)$.

Этим все слова веса 1 из всех множеств $W_n(X)$ определены. Пусть натуральное число $h>1$ и все слова из всех множеств $W_n(X)$, $n\in J$ веса меньше h уже определены.

I.2. Если $w_1,\dots,w_m\in W_n(X)$, $n\in J$, $\omega\in\Omega_m$, $m>0$, $\max_i h(w_i)=h-1$, то выражение $\sum^{\omega} w_i$ есть слово из $W_n(X)$ веса h.

I.3. Если $w_1,\dots,w_m\in W_n(X), n\in J, x\in X_m, m>0$, $\max h(w_i)=h-1$, то выражение $w_1\dots w_m x$ есть слово из $W_n(X)$ веса h.

Назовем слова вида $\sum^{\omega} w_i$ суммами, вида $w_1\dots w_m x$ – произведениями. Обозначим $\varepsilon_0(\sum^{\omega} w_i)=\omega$, $\varepsilon_i(\sum^{\omega} w_i)=w_i$ $(\omega\in\Omega_m$, $i=1,\dots,m)$, $\varepsilon_0(w_1\dots w_m x)=x$, $\varepsilon_i(w_1\dots w_m x)=w_i$.

Слова $w, w'\in W_n(X)$ являются равными $(w=w')$ только при $h(w)=h(w')$ по следующему индуктивному определению.

<u>Определение II.</u>

II.1. Если $h(w)=h(w')=1$, то $w=w'$ тогда и только тогда, когда либо $w=0_\nu^n$, $w'=0_\mu^n$ и $\nu=\mu$, либо $w, w'\in X_n$ и w, w' равны как элементы множества X_n.

Пусть натуральное число $h>1$ и равенство уже определено во всех случаях, когда $h(w)=h(w')<h$.

II.2. Если $h(w)=h(w')=h$, то $w=w'$ тогда и только тогда, когда либо w, w' обе суммы и $\varepsilon_0(w)=\varepsilon_0(w')$, $\varepsilon_i(w)=\varepsilon_i(w')$, $i=1,\dots,m$, либо w, w' оба произведения $\varepsilon_0(w)=\varepsilon_0(w')$, $\varepsilon_i(w)=\varepsilon_i(w')$, $i=1,\dots,m$.

Если $m\neq n$, то $W_n(X)\cap W_m(X)=\phi$.

Определим на всех множествах $W_n(X)$ при помощи I.1 и I.2 обычным образом все операции из Ω. Кроме того, сопоставим всяким $w_1,\dots,w_m\in W_n(X)$, $w\in W_m(X), n\in J$, $m\in\bar{J}$ индукцией слово $w_1\dots w_m w\in W_n(X)$, которое назовем произведением слов $w_1,\dots,w_m, w$.

Определение Ш.

Ш.I. Если $h(w)=1$ и $w \in X_m$, то произведение равно слову $w_1 \cdots w_m w$, если же $w = 0_\nu^m$, то положим $w_1 \cdots w_m 0_\nu^m = 0_\nu^n$.

Пусть натуральное число $h > 1$, $h(w)=h$ и произведение уже определено во всех случаях, когда $h(w) < h$.

Ш.2. Если $w \in \sum^{\omega} v_i$, то положим $w_1 \cdots w_m w = \sum^{\omega} w_1 \cdots w_m v_i$.

Ш.3. Если $w = v_1 \cdots v_l x$, то положим $w_1 \cdots w_m w = (w_1 \cdots w_m v_1) \cdots$ $\cdots (w_1 \cdots w_m v_l) x$.

Теорема I. Совокупность $W_J(X) = \{W_n(X),\ n \in J\}$ множеств слов $W_n(X)$ является Ω-системой, свободной над множеством образующих X.

Доказательство. Покажем сначала, что $W_J(X)$ – Ω-система, т.е. в ней выполняются тождества (I)–(3).

Тождества (2) и (3) следуют из определений Ш.2 и Ш.I. Покажем индукцией по $h(z)$, что в $W_J(X)$ выполняется тождество (I).

При $h(z) = 1$ (I) следует из определений Ш.I и Ш.3. Пусть натуральное число $h > 1$, $h(z)=h$ и (I) уже доказано во всех случаях, когда $h(z) < h$. Тогда при $z = w_1 \cdots w_k x$ имеем

$$x_1 \cdots x_m (y_1 \cdots y_l z) = x_1 \cdots x_m ((y_1 \cdots y_l w_1) \cdots (y_1 \cdots y_l w_k) x) =$$
$$= (x_1 \cdots x_m (y_1 \cdots y_l w_1)) \cdots (x_1 \cdots x_m (y_1 \cdots y_l w_k)) x,$$
$$(x_1 \cdots x_m y_1) \cdots (x_1 \cdots x_m y_l) z = ((x_1 \cdots x_m y_1) \cdots (x_1 \cdots x_m y_l) w_1) \cdots$$
$$\cdots ((x_1 \cdots x_m y_1) \cdots (x_1 \cdots x_m y_l) w_k) x,$$

но ввиду $h(w_i) < h$, $i = 1, \ldots, k$ по предположению индукции $x_1 \cdots x_m (y_1 \cdots y_l w_i) = (x_1 \cdots x_m y_1) \cdots (x_1 \cdots x_m y_l) w_i$. При $z = \sum^{\omega} w_i$ доказательство аналогично.

Из определений I и Ш ясно, что X – множество образующих Ω-системы $W_J(X)$. Остается доказать, что $W_J(X)$ свободна над X. Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – произвольная Ω-система, $\tau = \{\tau_n, n \in J\}$, $\tau_n : X_n \to A_n$ – отображение множества X в систему A. Покажем, что τ однозначно продолжимо до гомоморфизма $\rho = \rho(\tau) : W_J(X) \to A$.

Определим ρ индукцией по весу слов. Положим $x^\rho = x^\tau$ для всех $x \in X$, $(0_\nu^n)^\rho = 0_\nu^n$. Если натуральное число $h > 1$,

$h(w) = h$ и для всех слов из $W(X)$ веса меньше h отображение ρ уже определено, то при $w = \sum^{\omega} w_i$ положим $w^\rho = \sum^{\omega} w_i^\rho$ и при $w = w_1 \cdots w_m x$ положим $w^\rho = w_1^\rho \cdots w_m^\rho x^\rho$. Непосредственно из определения следуют (5), (6), и точно так же, как выше при доказательстве тождества (I), можно индукцией по h показать, что (4) тоже выполняется, т.е. ρ – гомоморфизм.

Предположим, что существует еще гомоморфизм $\pi : W(X) \to B$ такой, что $\pi \neq \rho$, $x^\pi = x^\tau$ при всех $x \in X$. Пусть w – слово наименьшего веса среди всех слов из $W(X)$, для которых $w^\pi \neq w^\rho$. Так как $x^\pi = x^\tau = x^\rho$, $(0_\nu^n)^\pi = 0_\nu^n = 0_\nu^\rho$, то $h(w) > 1$. При $w = \sum^{\omega} w_i$ имеем $w^\pi = \sum^{\omega} w_i^\pi$, при $w = w_1 \cdots w_m x$ имеем $w^\pi = w_1^\pi \cdots w_m^\pi x^\pi$ и так как $h(w_i) < h$, то $w_i^\pi = w_i^\rho$, следовательно, $w^\pi = w^\rho$, т.е. $\pi \neq \rho$ неверно. Теорема доказана.

Пусть $Z = \{Z_n, n \in J\}$ – совокупность непустых непересекающихся множеств Z_n, такая, что Z_1 содержит точно два элемента z_1^1, z_2^1 (если $1 \in J$; если $1 \notin J$, то Z_1 пусто), а всякое Z_m, $m \in J$, $m > 1$ – один элемент z^m.

Определим во всяком множестве $W_m(Z)$, $m \in \bar{J}$ слова v_t^m, u_t^m, $t = 1, 2, \ldots$

Определение IУ.

IУ.I. Положим $u_1^1 = z_1^1$, $u_1^m = z^m$, $m \in \bar{J}$, $m > 1$.

Пусть $t > 1$ и слова $u_1^m, \ldots, u_{t-1}^m$, $m \in \bar{J}$ уже определены.

IУ.2. Положим $u_t^1 = u_{t-1}^1 z_2^1$, $u_t^m = u_{t-1}^m u_1^m \cdots u_1^m u_1^m = u_{t-1}^m z^m \cdots z^m z^m$, $m > 1$.

IУ.3. Положим при всех $t = 1, 2, \ldots$, что $v_t^1 = u_{t+2}^1 u_1^1 = u_{t+2}^1 z_1^1$, $v_t^m = u_{t+2}^m u_2^m u_1^m \cdots u_1^m u_1^m = u_{t+2}^m u_2^m z^m \cdots z^m z^m$, $m > 1$.

Из определения IУ индукцией по t легко вывести, что $h(w_1 \cdots w_m u_t^m) = \max_i h(w_i) + t$, $h(w_1 \cdots w_m v_t^m) = \max_i h(w_i) + t + 3$ при любых $w_1, \ldots, w_m \in W_n(Z)$ $n, m \in \bar{J}$. Отсюда следует, что $v_t^m = v_p^m$ только при $t = p$.

Теорема 2. Подсистема Q , которую в Ω –системе $W_J(Z)$ порождает множество $V=\{V_n, n\in J\}$, где $V_0=Z_0, V_m=\{v_1^m, v_2^m, \dots\}$, $m\in\bar{J}$, свободна над этим множеством.

Доказательство. Для доказательства покажем, что Q изоморфна свободной над множеством $X=\{X_n, n\in J\}$ Ω –системе $W_J(X)$, где $X_0=Z_0$, а всякое $X_m=\{x_1^m, x_2^m, \dots\}$ – счетно. Определим стображение $\tau=\{\tau_n, n\in J\}$, $\tau_n : X_n \to V_n$. Положим, что τ_0 – тождественное отображение на $X_0=V_0$ и $(x_t^m)^{\tau_m} = v_t^m$ для всяких $x_t^m\in X_m$, $m\in\bar{J}$. Так как $v_t^m \neq v_p^m$ при $t\neq p$, то τ будет взаимнооднозначным отображением на все множество V и так как $W_J(X)$ свободна над X , то τ однозначно продолжимо до эпиморфизма $\rho : W_J(X)\to Q$. Покажем, что ρ – взаимнооднозначно.

Предположим, что некоторые пары неравных слов из $W_J(X)$ отображаются при ρ в один элемент. Выберем среди всех таких пар слов пару $w_1, w_2\in W_n(X)$, $w_1\neq w_2$, для которой $h(w_1)$ было бы наименьшим. Ясно, что $h(w_1)\leqslant h(w_2)$, иначе была бы выбрана пара w_2, w_1.

Заметим, что если $w=0_\nu^n$, то $w^\rho=0_\nu^n$, $h(w^\rho)=1$; если $w\in X_n$, то при $n=0$ имеем $h(w^\rho)=1$, но $w^\rho\neq 0_\nu^n$, а при $n>0$ имеем $w^\rho\in V_n$ и согласно IУ.3 слово w^ρ – произведение, $h(w^\rho)>1$; если $w=a_1\dots a_m x_t^m$ – произведение, то $w^\rho=a_1^\rho\dots a_m^\rho v_t^m$ – произведение, $h(w^\rho)>1$; если $w=\sum^\omega a_i$ – сумма, то $w^\rho=\sum^\omega a_i^\rho$ – сумма, $h(w^\rho)>1$ и $\varepsilon_0(w)=\varepsilon_0(w^\rho)$. Ввиду определения равенства слов невозможны случаи, когда $h(w_1)=h(w_2)=$ $=$ I, или когда $w_1=0_\nu^n$, или когда одно из слов $w_1 w_2$ – произведение или принадлежит множеству X_n, а другое – сумма, или когда w_1, w_2 оба суммы и $\varepsilon_0(w_1)\neq\varepsilon_0(w_2)$. Поэтому надо рассматривать лишь следующие случаи.

I. Случай $w_1=x_t^n\in X_n$, $w_2=a_1\dots a_m x_s^m$. Тогда $w_1^\rho=v_t^n$, $w_2^\rho=a_1^\rho\dots a_m^\rho v_s^m$. Так как из $w_1^\rho=w_2^\rho$ следует $\varepsilon_0(w_1^\rho)=\varepsilon_0(w_2^\rho)$ и $\varepsilon_0(w_1^\rho)=\varepsilon_0(v_t^n)\in Z_n$, $\varepsilon_0(w_2^\rho)=\varepsilon_0(a_1^\rho\dots a_m^\rho v_s^m)\in Z_m$, то $n=m$.

Если $n=1$, то $w_1^\rho=v_t^1=u_{t+2}^1 z_2^1$, $w_2^\rho=a_1^\rho v_s^n=a_1^\rho u_{s+2}^1 z_2^1$ и из $w_1^\rho=w_2^\rho$ следует $u_{t+2}^1=\varepsilon_1(w_1^\rho)=\varepsilon_1(w_2^\rho)=a_1^\rho u_{s+2}^1$, $u_{t+1}^1=\varepsilon_1(u_{t+2}^1)=$ $=\varepsilon_1(a_1^\rho u_{s+2}^1)=a_1^\rho u_{s+1}^1$ и т.д.. Если предполагать, что $s<t$, то после нескольких шагов получим $u_{t-s+1}=a_1^\rho u_1^1$, $t-s+1>1$, что невозможно из-за $\varepsilon_0(u_{t-s+1})=z_2^1\neq z_1^1=\varepsilon_0(a_1^\rho u_1^1)$. Если предполагать, что $s\geq t$, то получим $u_1^1=a_1^\rho u_{s-t+1}^1$ и $s-t+1\geq 1$, что опять невозможно из-за $h(u_1^1)=1<h(a_1^\rho)+s-t+1=h(a_1^\rho u_{s-t+1}^1)$.

Если $n>1$, то $w_1^\rho=v_t^m=u_{t+2}^n u_2^n z^n\dots z^n$, $w_2^\rho=a_1^\rho\dots a_n^\rho v_s^n=$ $=a_1^\rho\dots a_n^\rho(u_{s+2}^n u_2^n z^n\dots z^n)=(a_1^\rho\dots a_n^\rho u_{s+2}^n)(a_1^\rho\dots a_n^\rho u_2^n)(a_1^\rho\dots a_n^\rho z^n)\dots(a_1^\rho\dots a_n^\rho z^n)$, откуда $u_2^n=\varepsilon_2(w_1^\rho)=\varepsilon_2(w_2^\rho)=a_1^\rho\dots a_n^\rho u_2^n$, что опять невозможно из-за $h(u_2^n)=2<\max h(a_i^\rho)+2=h(a_1^\rho\dots a_n^\rho u_2^n)$.

2. Случай $w_1=a_1\dots a_m x_t^m$, $w_2=b_1\dots b_l x_s^l$. Точно так же, как в случае I, получим, что $m=l$.

Если $m=1$, то $w_1^\rho=a_1^\rho v_t^1=a_1^\rho u_{t+2}^1 z_1^1$, $w_2^\rho=b_1^\rho u_{s+2}^1 z_1^1$. Если предполагать, что $t>s$, то после нескольких шагов получим $a_1^\rho u_{t-s+1}^1=b_1^\rho u_1^1$, $t-s+1>1$, что неверно, ибо $\varepsilon_0(a_1^\rho u_{t-s+1}^1)=$ $=z_2^1\neq z_1^1=\varepsilon_0(b_1^\rho u_1^1)$. Точно так же ведет к противоречию предположение $s>t$, следовательно, $s=t$ и после нескольких шагов получим $a_1^\rho=b_1^\rho$. Так как $w_1\neq w_2$, то $a_1\neq b_1$, что из-за $h(a_1)<h(w_1)$, $a_1^\rho=b_1^\rho$ противоречит выбору слов $w_1 w_2$.

Если $m>1$, то $w_1^\rho=a_1^\rho\dots a_m^\rho v_t^m=a_1^\rho\dots a_m^\rho(u_{t+2}^m u_2^m u_1^m\dots u_1^m)$, $w_2^\rho=b_1^\rho\dots b_m^\rho v_1^m=b_1^\rho\dots b_m^\rho(u_{s+2}^m u_2^m u_1^m\dots u_1^m)$, откуда

$$a_1^\rho \dots a_m^\rho u_{t+2}^m = b_1^\rho \dots b_m^\rho u_{s+2}^m , \qquad (7)$$

$$a_1^\rho \dots a_m^\rho u_2^m = b_1^\rho \dots b_m^\rho u_2^m . \qquad (8)$$

Из (8) получим

$$a_1^\rho \dots a_m^\rho u_1^m = \varepsilon_1(a_1^\rho \dots a_m^\rho u_2^m) = \varepsilon_1(b_1^\rho \dots b_m^\rho u_2^m) = b_1^\rho \dots b_m^\rho u_1^m ,$$

откуда

$$a_i^\rho = \varepsilon_i(a_1^\rho \dots a_m^\rho u_1^m) = \varepsilon_i(b_1^\rho \dots b_m^\rho u_1^m) = b_i^\rho$$

при всех i . Из (7) получим теперь, что

$$\max h(a_i^\rho) + t + 2 = h(a_1^\rho \dots a_m^\rho u_{t+2}^m) = h(b_1^\rho \dots b_m^\rho u_{s+2}^m) =$$

$$= \max h(b_i^\rho) + s + 2 = \max h(a_i^\rho) + s + 2 ,$$

откуда $s = t$. Так как $w_1 \neq w_2$, то существует индекс i такой, что $a_i \neq b_i$, но из-за $h(a_i) < h(w_1), a_i^\rho = b_i^\rho$ это противоречит выбору слов w_1, w_2.

3. Случай $w_1 = \sum^\omega a_i, w_2 = \sum^\omega b_i$. Тогда $w_1^\rho = \sum^\omega a_i^\rho$, $w_2^\rho = \sum^\omega b_i^\rho$ и из $w_1^\rho = w_2^\rho$ следует $a_i^\rho = \varepsilon_i(w_1^\rho) = \varepsilon_i(w_2^\rho) = b_i^\rho$ при всех i. Так как $w_1 \neq w_2$, то существует индеку i такой, что $a_i \neq b_i$, но из-за $h(a_i) < h(w_1)$, $a_i^\rho = b_i^\rho$ это противоречит выбору слов w_1, w_2. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n, n \in J\}$ – произвольная Ω –система. Определим индуктивно множества $P_n, n \in J$ полиномов (одноместных функций) над $\mathcal{A}$, ранг $g(p)$ и область определения $\sigma(p)$ каждого полинома p.

Определение У.

У.I. При всяком $n \in J$ символ ξ^n есть единственный полином из P_n рангом I, $\sigma(\xi^n) = \mathcal{A}_n$.

Пусть натуральное число $g > 1$ и все полиномы из всех множеств $P_n, n \in J$ рангов меньше g уже определены.

У.2. Если $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A_n, q \in P_n, n \in J, \omega \in \Omega_m, m > 0$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \dots a_m \omega$. $i = 1, \dots, m$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

У.3. Если $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_m \in A_n$, $q \in P_n$, $n \in J$, $a \in A_m$, $m \in \bar{J}$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \dots a_m a$, $i = 1, \dots, m$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

У.4. Если $a_1, \dots, a_m \in l_n$, $q \in P_m$, $n \in J$, $m \in \bar{J}$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_m q$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

Обычным образом определяется значение $p(a) \in A_n$ полинома $p \in P_n$ в точке $a \in \sigma(p)$.

Пусть ρ – такое бинарное отношение на Ω –системе $\mathcal{A}$, что $\rho \cap (A_n \times A_m) = \phi$ при $n \neq m, n, m \in J$. Обозначим $\bar{\rho} = \rho \cup \rho^{-1}$. Будем говорить,,что последовательность полиномов $p_1, \dots \dots, p_r \in P_n$, $n \in J$ ρ –соединяет слова $a, a' \in \mathcal{A}_n$, если существуют $a_i, a_i', i = 1, \dots, r$ такие, что $a_i \bar{\rho} a_i'$, $a_i, a_i' \in \sigma(p_i)$, $a = p_1(a_1)$, $p_i(a_i') = p_{i+1}(a_{i+1})$, $i = 1, \dots, r-1$, $p_r(a_r') = a'$.

Так же, как и для обычных универсальных алгебр, можно показать (см., например, [2]), что минимальную содержащую ρ конгруэнцию Θ Ω–системы $\mathcal{A}$ можно определить так: для любых $a, a' \in A$ имеем $a \Theta a'$ тогда и только тогда, когда $a = a'$ или существует последовательность полиномов, ρ –соединяющую a, a'.

Для свободных Ω –систем эту конструкцию можно упростить. Для этого определим множества $F_n \subseteq P_n, n \in J$ специальных полиномов над $W_J(X)$.

Определение УI.

УI.I $\xi^n \in F_n$, $n \in J$.

УI.2 $a_1 \dots a_m \xi^m \in F_n$, $n \in J$.

Пусть натуральное число $g > 1$ и все специальные полиномы над $W_J(X)$ рангом меньше g уже определены.

УI.3 Если $q \in F_n$, то $a_1 \dots a_{i+1} q a_{i+1} \dots a_m \omega \in F_n$.

УI.4 Если $q \in F_n$, $x \in X_m$, то $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \cdots a_m x \in F_n$.

Лемма I. Пусть p – полином над $\mathfrak{W}_J(X)$, $a, a' \in \sigma(p)$ такие, что $a \bar{\rho} a'$. Если $p(a) \neq p(a')$, то существует соединяющая слова $w = p(a)$, $w' = p(a')$ последовательность специальных полиномов.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $g(p)$. По УI.I полином ранга 1 специальный, так что при $g(p) = 1$ полином p сам составляет искомую последовательность. Пусть $g > 1$, $g(p) = g$ и утверждение уже доказано для всех полиномов рангом меньше g.

I. Случай $p = w_1 \dots w_{i-1} q w_{i+1} \cdots w_m \omega$. Ввиду $g(q) < g$ по предположению индукции существует соединяющая слова $q(a)$, $q(a')$ последовательность специальных полиномов $q_1, \dots, q_r$. Ввиду У.3 за искомую можно взять последовательность $p_1, \dots, p_2$, где $p_j = w_1 \cdots w_{i-1} q_j w_{i+1} \cdots w_m \omega$, $j = 1, \dots, r$.

2. Случай $p = w_1 \dots w_{i-1} q w_{i+1} \cdots w_m w$. В этом случае применим вспомогательную индукцию по $h(w)$. Если $h(w) = 1$, то при $w = 0_\nu^m$ имеем $p(a) = 0_\nu^n = p(a')$, а при $w = x \in X_m$ доказательство аналогично таковому в случае I. Пусть натуральное число $h > 1$, $h(w) = h$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда $h(w) < h$.

2.I. Если $w = \sum^{\omega} a_i, \omega \in \Omega_k$, то рассмотрим полиномы $q_j = w_1 \cdots \cdots w_{i-1} q w_{i+1} \cdots w_m a_i$, $j = 1, \dots, k$. Ввиду $g(q_j) < g$ существует по предположению индукции последовательность специальных полиномов, соединяющая слова $q_j(a)$, $q_j(a')$ и точно так же, как в случае I отсюда выводится, что существует последовательность специальных полиномов, соединяющая слова $p_j(a)$, $p_j(a')$, где $p_j = q_1(a') \cdots q_{j-1}(a') q_j \, q_{j+1}(a) \cdots q_k(a) \omega$. Ввиду $p_j(a') = p_{j+1}(a)$ получим искомую последовательность, соединив соединяющие слова $p_j(a)$, $p_j(a')$ последовательности.

2.2. Если $w = a_1 \cdots a_k x$, то рассмотрим полиномы $q_j = w_1 \cdots \cdots w_{i-1} q w_{i+1} \cdots w_m q$, $j = 1, \dots, k$ и проведем рассуждения, аналогичные таковым в случае 2.I.

3. Случай $p = w_1 \dots w_m q$. При $g(q) = 1$ полином p сам специальный. При $g(q) > 1$ образуем вспомогательный полином p'.

3.I. При $q = a_1 \dots a_{i-1} q' a_{i+1} \dots a_k \omega$ положим $q'' = w_1 \dots w_m q'$,
$p' = (w_1 \cdots w_m a_1) \dots (w_1 \dots w_m a_{i-1}) q'' (w_1 \cdots w_m a_{i+1}) \cdots (w_1 \dots w_m a_k) \omega$.

3.2. При $q = a_1 \cdots a_{i-1} q' a_{i+1} \cdots a_k w$ положим $q'' = w_1 \cdots w_m q'$,
$p' = (w_1 \cdots w_m a_1) \cdots (w_1 \cdots w_m a_{i-1}) q'' (w_1 \cdots w_m a_{i+1}) \cdots (w_1 \cdots w_m a_k) w$.

3.3. При $q = a_1 \dots a_k q'$ положим $p' = (w_1 \cdots w_m a_1) \cdots (w_1 \cdots w_m a_k) q'$.

Во всех случаях $p'(a) = w$, $p'(a') = w'$. Поэтому в случаях 3.I и 3.2 доказательство свелось, ввиду $g(p') = g(p)$, к рассмотренным выше случаям I и 2, а в случае 3.3 утверждение, ввиду $g(p)' < g(p)$, верно по предположению индукции. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и из приведенного выше определения минимальной содержащей отношение ρ конгруэнции следует

Теорема 3. Если ρ – такое бинарное отношение на свободной Ω-системе $\mathfrak{W}_J(X)$, что $\rho \cap (W_n(X) \times W_m(X)) = \emptyset$ при $n \neq m$, $n, m \in J$ и Θ – минимальная содержащая ρ конгруэнция Ω-системы $\mathfrak{W}_J(X)$, то при всяких $w, w' \in W(X)$ имеем $w \Theta w'$ тогда и только тогда, когда $w = w'$ или существует ρ-соединяющая слова w, w' последовательность специальных полиномов.

Литература

I. Я.В. Хион. m-арные Ω-кольцоида. Сиб.Матем.ж. I967. УШ. I74–I94.

2. **G. Grätzer. Universal Algebra. Pennsylvania, 1966.**