TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 519.48

Я. Хенно

ГРУППОВЫЕ СИСТЕМЫ МЕНГЕРА

Пусть J — непустое подмножество множества всех натуральных чисел. Совокупность $A=\{A_n, n\in J\}$ непересекающихся множеств A_n называется <u>системой Менгера</u> (см. [2]), если для любых $n,m\in J$ всяким $a_1,\dots,a_m\in A_n, b\in A_m$ сопоставлен элемент $a_1\dots a_m b\in A_n$, причем выполняется тождество

$$x_1\dots x_m(y_1\dots y_k z)=(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_k)z \tag{I}$$

для любых $x_1,\dots,x_m\in A_n, y_1,\dots,y_k\in A_m, z\in A_k$.

Назовем систему множеств $L=\{L_n, n\in J\}$, где $L_n\subseteq A_n$, <u>левым идеалом</u> системы Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ (см. [2], [3]), если $x_1\dots x_m a\in L_n$ при любых $x_1,\dots,x_m\in A_n, a\in L_m, m,n\in J$.

Назовем систему множеств $R=\{R_n, n\in J_R\}$, где $R_n\subseteq A_n, J_R\subseteq J$, <u>правым идеалом</u> системы $A=\{A_n, n\in J\}$, если $a_1\dots a_m x\in R_n$ при любых $a_1,\dots,a_m\in R_n, n\in J_R, x\in A_m, m\in J$.

Назовем систему Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ <u>групповой</u>, если выполнены условия I, 2.

I. Система A не имеет нетривиальных (отличных от A) левых идеалов.

2. Система A не имеет нетривиальных (отличных от правых идеалов вида $R=\{A_n, n\in J_R\subseteq J\}$) правых идеалов.

Из определения следует, что для всякого $a\in A_m, m\in J$ множество $L_a=\{x\dots xa, x\in A_n, n\in J\}$ — левый идеал системы A. Так как всякий левый идеал системы A содержит левые идеалы такого вида, то I эквивалентно условию

I'. Для всяких $a\in A_m, b\in A_n, m,n\in J$ существует $x\in A_n$ такой, что $x\dots xa=b$.

Из определения следует, что для всякого $m \in J$ и для всякого $a \in A_n, n \in J$ множество $R_a = \{a \dots ax, x \in A_m\}$ – правый идеал системы A. Так как всякий правый идеал системы A содержит правые идеалы такого вида, то 2 эквивалентно условию

2'. Для всякого $m \in J$ и для всяких $a, b \in A_n, n \in J$ существует $y \in A_m$ такой, что $a \dots ay = b$.

Если $A = \{A_n, n \in J\}$ – система Менгера, то определим на множестве $A' = \bigcup_n A_n$ бинарную операцию $a \circ b$ формулой $a \circ b = a \dots ax$. Относительно этой операции $(A', \circ)$ является полугруппой, а все A_n – ее правыми идеалами. Назовем полугруппу $(A', \circ)$ диагональной полугруппой системы A.

<u>Теорема I.</u> Система Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ является групповой тогда и только тогда, когда диагональная полугруппа $(A', \circ)$ системы A разлагается в прямое произведение $G_A \times J'$, где G_A – группа и $G_A \cong (A_n, \circ)$ при всяком $n \in J$, а J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на множестве J ввести умножение формулой $m \cdot n = m$ для всяких $m, n \in J$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – групповая система Менгера. Из I' следует, что полугруппа $(A', \circ)$ обратима слева, а из I', 2' следует при $m = n$, что при любом $n \in J$ полугруппа $(A_n, \circ)$ – группа, единица e_n которой – идемпотент полугруппы $(A', \circ)$.

Так как $(A', \circ)$ – непересекающееся объединение групп $(A_n, \circ)$, то все его идемпотенты – единицы групп $(A_n, \circ)$, $n \in J$. Обозначим их совокупность через J'.

Известно ([2], УI. 3.3), что если полугруппа обратима слева, то всякий его идемпотент – правая единица всей полугруппы, т.е. для всяких $x \in A'$, $e_n \in J'$ имеем

$$x \circ e_n = x \dots x e_n = x. \tag{2}$$

Следовательно, J' – подполугруппа и так как $e_m \circ e_n = e_m$ для всяких $e_m, e_n \in J'$, то J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на J ввести умножение формулой $m \cdot n = m$.

Кроме того, в ([2], УI, 3.7) доказано, что $(A', \circ) = G_A \times J'$, где G_A – группа и $G_A \cong e_n \circ A'$ для всякого $n \in J$. Так как $e_n \circ a = e_n \dots e_n a \in A_n$ для всякого $a \in A'$, то $e_n \circ A' \subseteq A_n$, но с

другой стороны, $e_n \circ A' \supseteq e_n \circ A_n = A_n$, так как e_n – единица группы $(A_n, \circ)$. Следовательно, $G_A \cong (A_n, \circ)$ при всяком $n \in J$.

Обратно, пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – система Менгера, у которой $(A', \circ) = G_A \times J'$, где G_A – группа, $G_A \cong (A_n, \circ)$, а полугруппа J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на J ввести умножение $m \cdot n = m$.

Если $a = (g_1, m) \in A_m$, $b = (g_2, n) \in A_n$, $g_1 g_2 \in G_A$, то для $x = (g_2 g_1^{-1}, n) \in A_n$ имеем $x \dots xa = x \circ a = (g_2 g_1^{-1} g_1, nm) = (g_2, n) = b$, так что I' выполнено. Если $a = (g_1, n) \in A_n$, $b = (g_2, n) \in A_n$, то для $y = (g_1^{-1} g_2, m)$ имеем $a \dots ay = a \circ y = (g_1 g_1^{-1} g_2, nm) = (g_2, n) = b$ и 2' тоже выполнено. Следовательно, A – групповая система. Теорема доказана.

<u>Следствие 2.</u> Система Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ является групповой тогда и только тогда, когда выполняются условия I", 2".

I". Для всякого $n \in J$ существует $e_n \in A_n$ такой, что $x \circ e_n = x$ для всякого $x \in A_m, m \in J$, $e_n \circ y = y$ для всякого $y \in A_n$.

2". Для всякого $a \in A_m, m \in J$ существует $a^{-1} \in A_n$ такой, что $a^{-1} \circ a = e_n$ и для всякого $m \in J$, и для всякого $b \in A_n$ существует $b^{-1} \in A_m$ такой, что $b \circ b^{-1} = e_n$.

<u>Доказательство.</u> Если система $A = \{A_n, n \in J\}$ – групповая, то $(A', \circ) = G_A \times J'$. Тогда $x \circ e_n = x$ следует из (I), $e_n \circ y = y$ следует из того, что e_n – единица группы $(A_n, \circ)$, а в 2" можно для $a = (g_1, m) \in A_m$ взять $a^{-1} = (g^{-1}, n) \in A_n$, а для $b = (g_2, n) \in A_n$ взять $b^{-1} = (g_2^{-1}, m) \in A_m$.

Обратно, пусть I", 2" для системы Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ выполнены. Если $a \in A_m, b \in A_n, m, n \in J$, то для $x = b \circ a^{-1}$, где $a^{-1} \in A_n$ такой, что $a^{-1} \circ a = e_n$, выполняется I', если же $a, b \in A_n, n \in J$, то при произвольном $m \in J$ для $y = a^{-1} \circ b$, где $a^{-1} \in A_m$ такой, что $a \circ a^{-1} = e_n$ выполняется 2', следовательно, система A – групповая. Следствие доказано.

Назовем группу G_A основной группой групповой системы A.

Так как в групповой системе Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ при всяком $n \in J$ имеем $(A_n, \circ) \cong G_A$, то существуют изоморфизмы $\tau_n^m : (A_n, \circ) \to (A_m, \circ), n, m \in J$. При помощи следствия 2 легко проверить, что такие изоморфизмы [illegible] формулой:

$$a \tau_n^m = e_m \circ a \quad \text{для всякого } a \in A_n.$$

Известно (см. [2]), что системы Менгера возникают при рассмотрении совокупностей многоместных функций относительно операции суперпозиции. Пусть $\varphi_n(M)$ – совокупность всех n-местных функций на множестве M. Если $a_1,\dots,a_m\in\varphi_n(M)$, $b\in\varphi_m(M)$, то определим функцию $a_1\dots a_m b\in\varphi_n(M)$ следующей формулой:

$$\bar\alpha(a_1\dots a_m b)=(\bar\alpha a_1)\cdots(\bar\alpha a_m)b,$$

где $\bar\alpha a=\alpha_1\dots\alpha_n a\in M$ есть результат применения функции $a\in\varphi_n(M)$ к $\bar\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M^n$.

При таком определении совокупность множеств $\varphi_J(M)=\{\varphi_n(M),n\in J\}$ образует систему Менгера, все подсистемы которой называются <u>системами Менгера функции на множестве</u> M.

Пусть $A=\{A_n,n\in J\}$ – система Менгера функции на множестве M. Назовем подмножество $M_\lambda\subseteq M$ <u>замкнутым</u> для A, если при любых $\bar\alpha\in M_\lambda^n$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $\bar\alpha a\in M_\lambda$ и M_λ – минимальное подмножество множества M, обладающее этим свойством.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $A=\{A_n,n\in J\}$ – система Менгера функции на множестве M. Если M_λ – замкнутое для A подмножество множества M, то для всяких $\bar\alpha\in M_\lambda^n$, $n\in J$ имеем $M_\lambda=\{\bar\alpha a,\ a\in A_n\}$. Если A – групповая система, то для всяких $\bar\alpha\in M^n$, $n\in J$ множество $M'=\{\bar\alpha a,\ a\in A_n\}$ замкнуто для A.

<u>Доказательство.</u> Если M_λ – замкнуто для A, $\bar\alpha\in M_\lambda^n$, $n\in J$, то ввиду замкнутости M_λ имеем $\bar\alpha a\in M_\lambda$ для всякого $a\in A_n$, следовательно, $M'=\{\bar\alpha a,\ a\in A_n\}\subseteq M_\lambda$. Но так как при любых $\beta_1,\dots,\beta_m\in M'$, $\beta_1=\bar\alpha a_1,\dots,\beta_m=\bar\alpha a_m$, $a_1,\dots,a_m\in A_n$, $b\in A_m$, $m\in J$ имеем ввиду $a_1\dots a_m b\in A_n$ что $\beta_1\dots\beta_m b=(\bar\alpha a_1)\dots(\bar\alpha a_m)b=\bar\alpha(a_1\dots a_m b)\in M'$ и M_λ – минимальное подмножество, обладающее этим свойством, то $M'=M_\lambda$.

Если A – групповая система, то точно также можно показать, что при всяких $\bar\alpha\in M^n$, $n\in J$ множество $M'=\{\bar\alpha a,\ a\in A_n\}$ обладает свойством: из $\beta_1,\dots,\beta_m\in M'$ следует $\beta_1\dots\beta_m b\in M'$ для всякого $b\in A_m$, $m\in J$. Пусть $M''\subseteq M'$ – произвольное истинное подмножество множества M', $\beta=\bar\alpha a\in M''$, $\beta_1=\bar\alpha a_1\in M'$, $a,a_1\in A_n$. При помощи следствия 2 получим $\beta_1=\bar\alpha a_1=\bar\alpha(e_n\circ a_1)=\bar\alpha((a\circ a^{-1})\circ a_1)=\bar\alpha(a\circ(a^{-1}\circ a))=$ $=\bar\alpha(a\dots a(a^{-1}\circ a_1))=(\bar\alpha a)\dots(\bar\alpha a)(a^{-1}\circ a)=\beta\dots\beta(a^{-1}\circ a)$, следовательно, множество M'' не может быть замкнутым. Лемма доказана.

Пусть $A=\{A_n,n\in J\}$ – система Менгера функции на множестве M, $M_\lambda,\lambda\in\Lambda(A)$ – совокупность всех замкнутых для A подмножеств множества M, $N=\bigcup\limits_\lambda M_\lambda$. Сопоставим всякому $a\in A_n$, $n\in J$ преобразование (одноместную функцию) $\bar a: N\to N$, определенную формулой: $\alpha\circ\bar a=\alpha\dots\alpha a$, где $\alpha\circ\bar a\in N$ обозначает результат применения преобразования $\bar a$ к $\alpha\in N$.

<u>Лемма 4.</u> Если $A=\{A_n,n\in J\}$ – групповая система Менгера функции на множестве M, то отображение $a\to\bar a$ есть изоморфизм групп $(A_n,\circ)$ на одну и ту же группу $\bar G_A$ взаимно однозначных преобразований множества N.

<u>Доказательство.</u> Так как при всяких $\alpha\in N$, $a\in A_n$, $b\in A_m$, $n,m\in J$ имеем $\alpha\circ(\overline{a\circ b})=\alpha\dots\alpha(a\circ b)=\alpha\dots\alpha(a\dots ab)=(\alpha\dots\alpha a)\dots(\alpha\dots\alpha a)b=(\alpha\dots\alpha a)\circ\bar b=(\alpha\circ\bar a)\circ\bar b=\alpha\circ(\bar a\circ\bar b)$, то отображение $a\to\bar a$ – гомоморфизм.

Покажем, что

$$\alpha\circ\bar e_n=\alpha\dots\alpha e_n=\alpha \tag{3}$$

при всяких $\alpha\in N$, $n\in J$. Действительно, если $\alpha\in N$, то $\alpha\in M_\lambda$ для какого-то замкнутого для A подмножества M_λ. Согласно лемме 3 $M_\lambda=\{\alpha\dots\alpha a,\ a\in A_n\}$, следовательно, существует $a\in A_n$ такой, что $\alpha=\alpha\dots\alpha a=\alpha\circ\bar a$, так что $\alpha\circ\bar e_n=(\alpha\circ\bar a)\circ\bar e_n=$ $=\alpha\circ(\bar a\circ\bar e_n)=\alpha\circ(\overline{a\circ e_n})=\alpha\circ\bar a=\alpha$.

Отсюда следует, что $\alpha\circ\overline{a\tau_n^m}=\alpha\circ(\overline{e_m\circ a})=\alpha\circ(\bar e_m\circ\bar a)=(\alpha\circ\bar e_m)\circ\bar a=\alpha\circ\bar a$ при всяких $\alpha\in N$, $a\in A_n$, $m,n\in J$, т.е. отображение $a\to\bar a$ сопоставит соответствующим при изоморфизме τ_n^m элементам групп $(A_n,\circ)$, $(A_m,\circ)$ одно и то же преобразование множества N. Все эти преобразования – взаимно однозначные, так как если для некоторых $\alpha_1,\alpha_2\in N$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $\alpha_1\circ\bar a=\alpha_2\circ\bar a$, то $\alpha_1=\alpha_1\circ\bar e_n=\alpha_1\circ(\overline{a\circ a^{-1}})=\alpha_1\circ(\bar a\circ\overline{a^{-1}})=$

$$=(\alpha_1\circ\bar a)\circ\overline{a^{-1}}=(\alpha_2\circ\bar a)\circ\overline{a^{-1}}=\alpha_2\circ(\bar a\circ\overline{a^{-1}})=$$
$$=\alpha_2\circ(\overline{a\circ a^{-1}})=\alpha_2\circ\bar e_n=\alpha_2,$$

где $a^{-1}\in A_n$ такой, что $a\circ a^{-1}=e_n$. Кроме того, соответствие $a\to\bar a$ – взаимно однозначное, так как если для $a_1,a_2\in A_n$, $n\in J$ имеем $\bar a_1=\bar a_2$, то для всякого $\bar\alpha\in M^n$ имеем ввиду того, что $\bar\alpha e_n\in N$ согласно лемме 3, что $\bar\alpha a_1=\bar\alpha(e_n\circ a_1)=\bar\alpha(e_n\dots e_n a_1)=(\bar\alpha e_n)\dots(\bar\alpha e_n)a_1=(\bar\alpha e_n)\circ\bar a_1=(\bar\alpha e_n)\circ\bar a_2=(\bar\alpha e_n)\dots(\bar\alpha e_n)a_2=\bar\alpha(e_n\dots e_n a_2)=\bar\alpha(e_n\circ a_2)=\bar\alpha a_2$, т.е. $a_1=a_2$. Лемма доказана.

Назовем группу $\bar G_A$ основной группой преобразований групповой системы функции A.

Пусть G – группа взаимно однозначных преобразований некоторого подмножества $N \subseteq M$. Обозначим произведение элементов $g_1, g_2 \in G$ через $g_1 \circ g_2$, а результат применения преобразования $g \in G$ к $\alpha \in N$ через $\alpha \circ g$. Рассмотрим G как групповую систему Менгера ($J=\{1\}$) одноместных функций на множестве N и пусть $M_\lambda, \lambda \in \Lambda(G)$ — совокупность всех замкнутых для G подмножеств множества N. Можно заметить следующее:

1^0. Если e – единица группы G, то $\alpha \circ e = \alpha$ для всякого $\alpha \in N$, иначе для $\alpha \neq \alpha \circ e$ было бы $(\alpha \circ e) \circ e = \alpha \circ (e \circ e) = \alpha \circ e$, но e – взаимно однозначное преобразование.

2^0. $\bigcup\limits_\lambda M_\lambda = N$, так как для всякого $\alpha \in N$ множество $M' = \{\alpha \circ g, g \in G\}$ согласно лемме 3 замкнуто и $\alpha = \alpha \circ e \in M'$.

3^0. Для всяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M_\lambda$, $\lambda \in \Lambda(G)$, $(n>1)$ существуют $g_1, \ldots, g_{n-1} \in G$ такие, что $\alpha_2 = \alpha_1 \circ g_1, \ldots, \alpha_n = \alpha_1 \circ g_{n-1}$, так как согласно лемме 3 имеем $M_\lambda = \{\alpha_1 \circ g, g \in G\}$.

Обозначим через $F_n(G)$ $(n>1)$ совокупность всех функций $f_n : G^{n-1} \to G$, для которых выполнены следующие условия:

$$(e, \ldots, e) f_n = e. \tag{4}$$

Из $\alpha \circ g_1 = \alpha \circ g_1', \ldots, \alpha \circ g_{n-1} = \alpha \circ g_{n-1}'$ следует

$$\alpha \circ (g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n = \alpha \circ (g_1', \ldots, g_{n-1}') f_n. \tag{5}$$

Л е м м а 5. Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – групповая система Менгера функции на множестве M. Если для всякой $n \in J \setminus 1$ определить функцию $f_n^A : \bar{G}_A^{n-1} \to \bar{G}_A$ формулой

$$(g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n^A = \overline{e_n a_1 \ldots a_{n-1} e_n}, \tag{6}$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A_n$ такие, что $\bar{a}_1 = g_1, \ldots, \bar{a}_{n-1} = g_{n-1}$, то $f_n^A \in F_n(\bar{G}_A)$.

Доказательство. Так как $\bar{e}_n = e$, то $(e, \ldots, e) f_n = \overline{e_n e_n \ldots e_n e_n} = \bar{e}_n = e$ и условие (4) выполнено.

Пусть $\alpha \in M$, $g_1, \ldots, g_{n-1}, g_1', \ldots, g_{n-1}' \in \bar{G}_A$ такие, что $\alpha \circ g_i = \alpha \circ g_i'$ и $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_1', \ldots, a_{n-1}' \in A_n$ такие, что $\bar{a}_i = g_i$, $\bar{a}_i' = g_i'$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$\alpha \circ (g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n^A = \alpha \circ (\overline{e_n a_1 \ldots a_{n-1} e_n}) = \alpha \ldots \alpha (e_n a_1 \ldots a_{n-1} e_n) =$$
$$= (\alpha \ldots \alpha e_n)(\alpha \ldots \alpha a_1) \ldots (\alpha \ldots \alpha a_{n-1}) e_n = (\alpha \circ \bar{e}_n)(\alpha \circ \bar{a}_1) \ldots (\alpha \circ \bar{a}_{n-1}) e_n =$$
$$= (\alpha \circ \bar{e}_n)(\alpha \circ \bar{a}_1') \ldots (\alpha \circ \bar{a}_{n-1}') e_n = (\alpha \ldots \alpha e_n)(\alpha \ldots \alpha a_1') \ldots (\alpha \ldots \alpha a_{n-1}') e_n =$$
$$= \alpha \ldots \alpha (e_n a_1' \ldots a_{n-1}' e_n) = \alpha \circ (\overline{e_n a_1' \ldots a_{n-1}' e_n}) = \alpha \circ (g_1', \ldots, g_{n-1}') f_n^A$$

и (6) тоже выполняется. Лемма доказана.

Пусть A – групповая система Менгера функции на множестве M. Если множество M не замкнуто для A, то определим для всякого $n \in J$ функцию $\psi_n^A : [M^n \setminus (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda(A)} M_\lambda^n)] \to N = \bigcup\limits_\lambda M_\lambda$ формулой

$$\psi_n^A(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} e_n, \tag{7}$$

где

$$\bar{\alpha} \in M^n \setminus (\bigcup_\lambda M_\lambda^n).$$

Т е о р е м а 6. Всякая групповая система Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ функции на множестве M может быть задана при помощи основной группы $\bar{G}_A$ преобразований множества $N = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda(A)} M_\lambda$, множества индексов J, системы функций $\{f_n^A, n \in J \setminus 1\}$, определенных формулой (6), и если M не замкнуто для A, системы функций $\{\psi_n^A, n \in J\}$, определенных формулой (7).

Обратно, пусть заданы группа G взаимно однозначных преобразований множества $N \subseteq M$, множество индексов J, система функций $\{f_n, n \in J \setminus 1\}$, $f_n \in F_n(G)$, и если множество M не замкнуто для G, система функций $\{\psi_n, n \in J\}$, где $\psi_n : [M^n \setminus (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda(G)} M_\lambda^n)] \to N$. Если для всяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$, $(g, n) \in G \times J$ определить элемент $\alpha_1 \ldots \alpha_n (g, n) \in M$ формулой

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n (g, n) = \begin{cases} \psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \circ g, \text{ если } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M^n \setminus (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda(G)} M_\lambda^n) \\ \alpha_1 \circ g, \text{ если } n = 1 \text{ и } \alpha_1 \in N \\ \alpha_1 \circ (g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n \circ g, \text{ если } n > 1 \text{ и } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M_\lambda^n, \text{ где} \\ g_1, \ldots, g_{n-1} \in G \text{ такие, что } \alpha_2 = \alpha_1 \circ g_1, \ldots, \alpha_n = \alpha_1 \circ g_{n-1} \end{cases} \tag{8}$$

то совокупность $A=\{A_n, n\in J\}$, где $A_n=\{(g,n),\ g\in G\}$ образует групповую систему Менгера функции на множестве M, для которой $G_A=G$, $f_n=f_n^A$, $\psi_n^A=\psi_n$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A=\{A_n, n\in J\}$ — групповая система Менгера функции на множестве M. Для всяких $\bar\alpha\in M^n$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем тогда $\bar\alpha a=\bar\alpha(e_n\circ a)=\bar\alpha(e_n\dots e_n a)=(\bar\alpha e_n)\dots(\bar\alpha e_n)a=(\bar\alpha e_n)\circ\bar a$, так как $\bar\alpha e_n\in N$ согласно лемме 3. Если $\bar\alpha\in M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)} M_\lambda^n)$, то $\bar\alpha e_n=\psi_n^A(\bar\alpha)$, если же $\bar\alpha\in M_\lambda^n$, то в случае $n=1$ имеем $\bar\alpha e_n=\alpha_1 e_n$, а в случае $n>1$ имеем согласно лемме 3, что $M_\lambda=\{\alpha_1\dots\alpha_1 a,\ a\in A_n\}$, следовательно, существуют $a_1,\dots,a_{n-1}\in A_n$ такие, что $\alpha_2=\alpha_1\dots\alpha_1 a_1$, $\dots$, $\alpha_n=\alpha_1\dots\alpha_1 a_{n-1}$ и, учитывая (4), получим, что $\bar\alpha e_n=$
$=\alpha_1\dots\alpha_n e_n=(\alpha_1\dots\alpha_1 e_n)(\alpha_1\dots\alpha_1 a_1)\dots(\alpha_1\dots\alpha_1 a_{n-1})e_n=$
$=\alpha_1\dots\alpha_1(e_n a_1\dots a_{n-1}e_n)=\alpha_1\circ(\overline{e_n a_1\dots a_{n-1}e_n})=\alpha_1\circ(\bar a_1,\dots,\bar a_{n-1})f_n^A$.

Этим $\bar\alpha a$ во всех случаях выражена при помощи группы G_A, функции f_n^A, ψ_n^A, и первая половина теоремы доказана.

Обратно, пусть задана группа G взаимно однозначных преобразований множества $N\subseteq M$, множество индексов J, система $\{f_n, n\in J\setminus 1\}$ функции $f_n\in F_n(G)$, и если множество M не замкнуто относительно G, система функции $\{\psi_n, n\in J\}$, где $\psi_n: [M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)} M_\lambda^n)]\to N$. Используя сделанные выше замечания I^0, 2^0, 3^0, легко убедиться, что все n-местные функции (g,n), $g\in G$, $n\in J$ при помощи (8) однозначно определены. При этом парам $(g_1,n),(g_2,n)$, $g_1,g_2\in G$, $g_1\neq g_2$ при всяком $n\in J$ соответствуют разные функции. Действительно, ввиду $g_1\neq g_2$ существует $\alpha\in N$ такой, что $\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2$, следовательно, в случае $n=1$ имеем $\alpha(g_1,1)=\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2=\alpha(g_2,1)$, а в случае $n>1$ получим ввиду (4), что $\alpha\dots\alpha(g_1,n)=\alpha\circ(e,\dots,e)f_n\circ g_1=\alpha\circ(e\circ g_1)=$
$=\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2=\alpha\dots\alpha(g_2,n)$. Обозначим $A_n=\{(g,n),\ g\in G\}$.

Пусть $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h,m)\in A_m$, $n,m\in J$. Покажем, что

$$(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)=(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h,n)\in A_n,\quad(9)$$

т.е. совокупность функции $A=\{A_n, n\in J\}$ образует подсистему симметрической системы $\mathcal{G}_J(M)$.

Если $\bar\alpha\in M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)} M_\lambda^n)$, то $\bar\alpha((g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m))=$
$=(\bar\alpha(g_1,n))\dots(\bar\alpha(g_m,n))(h,m)=(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_1)\dots(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_m)(h,m)$
и так как $(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_1)\circ(g_1^{-1}\circ g_i)=\psi_n(\bar\alpha)\circ g_i$, $i=2,\dots,m$, то согласно (8) получим
$(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_1)\dots(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_m)(h,m)=(\psi_n(\bar\alpha)\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h=$
$=\psi_n(\bar\alpha)\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h)=\bar\alpha(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h,n)$.

Пусть $\bar\alpha\in M_\lambda^n$, $\lambda\in\Lambda(G)$. Если $n=1$, то $\bar\alpha=\alpha\in M$ и $\alpha((g_1,1)\dots(g_m,1)(h,m))=(\alpha(g_1,1))\dots(\alpha(g_m,1))(h,m)=(\alpha\circ g_1)\dots(\alpha\circ g_m)(h,m)=(\alpha\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h=\alpha\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h=\alpha(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h,1)$.

Если $n>1$, то согласно замечанию 3^0 существуют g_1', $\dots$, $g_{n-1}'\in G$ такие, что $\alpha_2=\alpha_1\circ g_1',\dots,\alpha_n=\alpha_1\circ g_{n-1}'$. Поэтому

$$\bar\alpha(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)=$$
$$=(\bar\alpha(g_1,n))\dots(\bar\alpha(g_m,n))(h,m)=$$
$$=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_1)\dots(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_m)(h,m)=$$
$$=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h=$$
$$=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n)\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h=$$
$$=\bar\alpha(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h,n).$$

Для всяких $(g,n)\in A_n$, $(g_2,m)\in A_m$, $n,m\in J$ имеем ввиду (9), что $(g_1,n)\circ(g_2,m)=(g_1,n)\dots(g_1,n)(g_2,m)=g_1\circ(e,\dots,e)f_m\circ g_2=$ $=g_1\circ e\circ g_2=g_1\circ g_2$. Это значит, что диагональная полугруппа системы A разлагается в прямое произведение $G\times J'$, откуда согласно теореме I следует, что система A — групповая. Ввиду определения (8) ясно, что $G_A=G$, $f_n^A=f_n$, $\psi_n^A=\psi_n$. Теорема доказана.

Если $A=\{A_n, n\in J\}$ — групповая система Менгера, G_A — основная группа системы A, то согласно теореме I при всяком $n\in J$ существует изоморфизм $\tau_n:(A_n,\circ)\to G_A$.

С л е д с т в и е 7. Всякая групповая система Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ может быть задана при помощи основной группы G_A системы A, множества индексов J и системы функции $\{f_n^A, n\in J\setminus 1\}$, где $\varphi_n^A : G_A^{n-1} \to G_A$ определено формулой

$$(g_1,\dots,g_{n-1})\varphi_n^A = (e_n a_1 \dots a_{n-1} e_n)\tau_n, \tag{10}$$

где $a_1,\dots,a_{n-1}\in A_n$ такие, что $a_1\tau_n = g_1,\dots,a_{n-1}\tau_n = g_{n-1}$.

Обратно, пусть заданы группа G, множество индексов J и система функции $\{\varphi_n, n\in J\setminus 1\}$, где все $\varphi_n : G^{n-1}\to G$ удовлетворяют условию (4).

Если обозначить $A=\{(g,n), g\in G\}$ и сопоставить формулой (9) всяким $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h,m)\in A_m$ элемент $(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)\in A_n$, то совокупность $A=\{A_n, n\in J\}$ образует групповую систему Менгера, для которой $G=G_A$, $\varphi_n^A = f_n$.

Доказательство. Пусть $A=\{A_n, n\in J\}$ – групповая система Менгера. Превратим всякое $a\in A_n, n\in J$ в n-местную функцию $G_A^n \to G_A$, полагая,

$$g_1\dots g_n a = (a_1\dots a_n a)\tau_n,$$

где $g_1,\dots,g_n\in G_A$, $a_1,\dots,a_n\in A_n$ такие, что $a_1\tau_n = g_1,\dots,a_n\tau_n = g_n$.
Тогда A превратится в групповую систему функции на множестве G_A, причем G_A будет относительно A замкнутым. Для всяких $g\in G_A$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $g\circ\bar a = g\dots ga = (a'\dots a'a)\tau_n = (a'\circ a)\tau_n = a'\tau_n\circ a\tau_n = g\circ a\tau_n$, где $a'\in A_n$ такой, что $a'\tau_n = g$. Это значит, что группу $\bar G_A$ можно отождествить с G_A и тогда (6), и (10) определяют одинаковые функции. Поэтому первая половина утверждения следует из предыдущей теоремы.

Обратно, пусть заданы группа G, множество индексов J и система функции $\{\varphi_n, n\in J\setminus 1\}$, где все $\varphi_n : G^{n-1}\to G$ удовлетворяют условию (4).

Обозначим $A_n=\{(g,n), g\in G\}$ и сопоставим всяким $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h,m)\in A_m$ формулой (9) элемент $(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)\in A_n$. Тогда для всяких $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h_1,m),\dots,(h_k,m)\in A_m$, $(d,k)\in A_k$ имеем

$$(g_1,n)\dots(g_m,n)\left[(h_1,m)\dots(h_k,m)(d,k)\right] =$$

$$= (g_1,n)\dots(g_m,n)(h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d, m) =$$

$$= (g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d, n).$$

С другой стороны, если обозначить $[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m = g'$ и учитывать, что $(g_1\circ g'\circ h_1)^{-1}\circ(g_1\circ g'\circ h_i) = h_1^{-1}\circ g'^{-1}\circ g_1^{-1}\circ g_1\circ g'\circ h_i = h_1^{-1}\circ h_i$, то

$$((g_1,n)\dots(g_m,n)(h_1,m))\dots((g_1,n)\dots(g_m,n)(h_k,m))(d,k) =$$

$$= (g_1\circ g'\circ h_1, n)\dots(g\circ g'\circ h_k, n)(d,k) =$$

$$= (g_1\circ g'\circ h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d, n).$$

Следовательно, тождество (I) выполняется и $A=\{A_n, n\in J\}$ – система Менгера. Точно так же, как в конце доказательства теоремы 6, можно проверить, что A – групповая система. Следствие доказано.

Отсюда следует теорема I из [3].

Предположим в дальнейшем везде, что $|M|>2$ ($|M|$ – мощность множества M). Пусть S_M – симметрическая группа всех взаимно однозначных преобразований множества M, f_{m+1} $(m>0)$ – некоторая фиксированная функция из $F_{m+1}(S_M)$, результат применения которой к $a_1,\dots,a_m\in S_M$ обозначим через $<a_1,\dots,a_m>$. Будем везде опускать знак $\circ$, так что $\alpha<a_1,\dots,a_m> = \alpha\circ(a_1,\dots,a_m)f_{m+1}$ для всякого $\alpha\in M$. Через $(\alpha\beta)\in S_M$ обозначим транспозицию элементов $\alpha,\beta\in M$ (если $\alpha=\beta$, то $(\alpha\beta) = e$ – единица группы S_M), $(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)$.

Л е м м а 8. Всегда $\alpha<a_1,\dots,a_m>\in\{\alpha,\alpha a_1,\dots,\alpha a_m\}$.

Доказательство. Обозначим $\alpha a_i = \beta_i$, $i=1,\dots,m$, тогда из (5) следует, что $\alpha<a_1,\dots,a_m> = \alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$. Так как для всех $\gamma\in M$, $\gamma\notin\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m\}$ имеем $\gamma(\alpha\beta_i) = \gamma = \gamma e$, $i=1,\dots,m$, то из (4), (5) следует, что $\gamma<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)> = \gamma<e,\dots,e>\gamma e = \gamma$
Поэтому невозможно, что $\alpha<a_1,\dots,a_m> = \alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)> = \gamma$, $\gamma\notin\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m\}$, ибо тогда для взаимно однозначного преобразования $<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\in S_M$ было бы $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)> = \gamma = \gamma<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$, но $\alpha\neq\gamma$. Лемма доказана.

Л е м м а 9. Пусть $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)> = \beta\neq\alpha$, $\beta\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. Пусть $K=\{i, 1\leq i\leq m, \beta_i=\beta\}$ и пусть $b_j = (\alpha\beta_j)$, если $j\in K$ и $b_j = e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Тогда $\alpha<b_1,\dots,b_m> = \beta$.

Доказательство. Если $j\in K$, то $\beta_j=\beta$ и $\beta b_j=\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, если же $j\notin K$, то ввиду $\beta\neq\alpha$, $\beta\neq\beta_j$ имеем $\beta b_j=\beta e=\beta=\beta(\alpha\beta_j)$. Из-за (5) отсюда следует, что $\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta<b_1,\dots,b_m>$. Так как $\alpha\neq\beta$, то $\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\neq\beta$, иначе для взаимно однозначного преобразования $<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\in S_M$ было бы $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$, но $\alpha\neq\beta$. Поэтому $\beta<b_1,\dots,b_m>=\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\alpha$ согласно лемме 8, так как при $j\in K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, а при $j\notin K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\beta$. Ввиду $\alpha\neq\beta$ невозможно $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\alpha=\beta<b_1,\dots,b_m>$, и так как $\alpha b_j=\beta$, если $j\in K$, и $\alpha\beta_j=\alpha$, если $j\notin K$, то согласно лемме 8 получим $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\beta$. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta\neq\alpha$, $\beta\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. Пусть $K=\{i, 1\leq i\leq m, \beta_i=\beta\}$. Если $|K|>1$, то существуют $\gamma\in M$ и $c_1,\dots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\delta\neq\gamma$ и если $L=\{j, 1\leq j\leq m, \gamma c_j=\delta\}$, то $|L|<|K|$.

Доказательство. Пусть $b_j=(\alpha\beta_j)=(\alpha\beta)$, если $j\in K$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\beta$.

Выберем $\gamma\in M$ такой, что $\gamma\neq\alpha$, $\gamma\neq\beta$ (ввиду $|M|>2$ это всегда возможно). Фиксируем некоторый $k\in K$ и пусть $c_k=(\alpha\beta\gamma)$, $c_j=b_j$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Так как $\alpha b_j=\alpha c_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то согласно (5) имеем $\alpha<c_1,\dots,c_m>=\alpha<b_1,\dots,b_m>=\beta$. Поэтому $\beta<c_1,\dots,c_m>\neq\beta=\alpha<c_1,\dots,c_m>$. Но $\beta c_k=\gamma$, $\beta c_j=\alpha$ если $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\beta$, если $j\notin K$. Учитывая лемму 8, получим, что $\beta<c_1,\dots,c_m>=\alpha$ или $\beta<c_1,\dots,c_m>=\gamma$. Так как $\beta c_j=\alpha$ только при $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\gamma$ только при $j=k$, то в обоих случаях лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $\alpha,\beta\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть $k, 1\leq k\leq m$ — некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha\beta)$, $a_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Пусть $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta$. Тогда при всяком $\gamma\in M$ имеем $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\gamma$, где $b_k=(\alpha\gamma)$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$.

Доказательство. Утверждение тривиально, если $\gamma=\alpha$ или $\gamma=\beta$, поэтому предположим $\alpha\neq\gamma\neq\beta$. Обозначим $c_k=(\beta\alpha\gamma)$ и $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Так как $\beta c_j=\beta a_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то из (5) имеем $\beta<c_1,\dots,c_m>=\beta<a_1,\dots,a_m>$. Так как $\beta a_j\in\{\alpha,\beta\}$ при всех $j=1,\dots,m$, то по лемме 8 имеем $\beta<a_1,\dots,a_m>=\alpha$ ввиду того, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta$, $\alpha\neq\beta$ и $<a_1,\dots,a_m>\in S_M$ — взаимно однозначное преобразование. Следовательно, $\beta<c_1,\dots,c_m>=\beta<a_1,\dots,a_m>=\alpha$. Точно так же получим $\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma$ и так как $\alpha b_j=\alpha c_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma$. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть $k, 1\leq k\leq m$ — некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha,\beta)$, $b_k=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $a_j=b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Тогда из $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta$ следует $\gamma_1<b_1,\dots,b_m>=\gamma_2$.

Доказательство. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то $b_j=e$ при всех $j=1,\dots,m$, и утверждение следует из (4). Предположим, что $\gamma_1\neq\gamma_2$.

Если $\gamma_1=\alpha$, то утверждение следует из предыдущей леммы, если же $\gamma_1\neq\alpha$, то обозначим $c_k=(\alpha\gamma_1)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma_1$, следовательно, $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>\neq\gamma_1$ и согласно лемме 8 имеем $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\alpha$. Согласно предыдущей лемме отсюда следует $\gamma_1<b_1,\dots,b_m>=\gamma_2$. Лемма доказана.

Лемма 13. Если при некоторых $\alpha\in M$, $a_1,\dots,a_m\in S_M$ имеем $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$, то существует индекс $k, 1\leq k\leq m$ такой, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_k$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_2\in M$ имеем $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2$, где $c_k=(\gamma_1,\gamma_2)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$.

Доказательство. Если $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$, то согласно лемме 8 существуют индексы $i, 1\leq i\leq m$ такие, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_i$. Пусть $K=\{i, \alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_i\}$.

Если $|K|>1$, то обозначим $\alpha a_j=\beta_j$, $j=1,\dots,m$. Ввиду (5) имеем $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$ и, применяя $|K|-1$ раз лемму 10, получим, как и в случае $|K|=1$, что существует $k, 1\leq k\leq m$, $\gamma\in M$, $c_1,\dots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\gamma c_k\neq\gamma$ и $\gamma c_j\neq\gamma c_k$ при $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Обозначим $\gamma c_j=\delta_j$. Ввиду (5) имеем $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\gamma<(\gamma\delta_1),\dots,(\gamma\delta_m)>$. Согласно лемме 9 получим теперь, что $\gamma<(\gamma\delta_1),\dots,(\gamma\delta_m)>=\gamma<b_1,\dots,b_m>=\delta_k$, где $b_k=(\gamma\delta_k)$, $b_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$, откуда согласно лемме 12 следует доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Теорема 14. Если $|M|>2$, то $F_{m,M}(S_M)=\{\varphi_0^m,\varphi_1^m,\dots,\varphi_m^m\}$, где функции $\varphi_0^m,\dots,\varphi_m^m$ определены следующим образом:

Доказательство. Если $j\in K$, то $\beta_j=\beta$ и $\beta b_j=\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, если же $j\notin K$, то ввиду $\beta\neq\alpha$, $\beta\neq\beta_j$ имеем $\beta b_j=\beta e=\beta=\beta(\alpha\beta_j)$. Из (5) отсюда следует, что $\beta<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>=\beta<b_1,\ldots,b_m>$. Так как $\alpha\neq\beta$, то $\beta<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>\neq\beta$, иначе для взаимно однозначного преобразования $<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>\in S_M$ было бы $\alpha<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>=\beta<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>$, но $\alpha\neq\beta$. Поэтому $\beta<b_1,\ldots,b_m>=\beta<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>=\alpha$ согласно лемме 8, так как при $j\in K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, а при $j\notin K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\beta$. Ввиду $\alpha\neq\beta$ невозможно $\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\alpha=\beta<b_1,\ldots,b_m>$, и так как $\alpha b_j=\beta$, если $j\in K$, и $\alpha b_j=\alpha$, если $j\notin K$, то согласно лемме 8 получим $\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\beta$. Лемма доказана.

Л е м м а 10. Пусть $\alpha<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>=\beta\neq\alpha$, $\beta\in\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$. Пусть $K=\{i,1\leq i\leq m,\ \beta_i=\beta\}$. Если $|K|>1$, то существуют $\gamma\in M$ и $c_1,\ldots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\ldots,c_m>=\delta\neq\gamma$ и если $L=\{j,1\leq j\leq m,\ \gamma c_j=\delta\}$, то $|L|<|K|$.

Доказательство. Пусть $b_j=(\alpha\beta_j)=(\alpha\beta)$, если $j\in K$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus K$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\beta$.

Выберем $\gamma\in M$ такой, что $\gamma\neq\alpha$, $\gamma\neq\beta$ (ввиду $|M|>2$ это всегда возможно). Фиксируем некоторый $k\in K$ и пусть $c_k=(\alpha\beta\gamma)$, $c_j=b_j$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Так как $\alpha c_j=\alpha b_j$ при всех $j=1,\ldots,m$, то согласно (5) имеем $\alpha<c_1,\ldots,c_m>=\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\beta$. Поэтому $\beta<c_1,\ldots,c_m>\neq\beta=\alpha<b_1,\ldots,b_m>$. Но $\beta c_k=\gamma$, $\beta c_j=\alpha$, если $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\beta$, если $j\notin K$. Учитывая лемму 8, получим, что $\beta<c_1,\ldots,c_m>=\alpha$ или $\beta<c_1,\ldots,c_m>=\gamma$. Так как $\beta c_j=\alpha$ только при $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\gamma$ только при $j=k$, то в обоих случаях лемма доказана.

Л е м м а 11. Пусть $\alpha,\beta\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть $k,1\leq k\leq m$ – некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha\beta)$, $a_j=e$, если $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Пусть $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\beta$. Тогда при всяком $\gamma\in M$ имеем $\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\gamma$, где $b_k=(\alpha\gamma)$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$.

Доказательство. Утверждение тривиально, если $\gamma=\alpha$ или $\gamma=\beta$, поэтому предположим $\alpha\neq\gamma\neq\beta$. Обозначим $c_k=(\beta\alpha\gamma)$ и $c_j=e$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Так как $\beta c_j=\beta a_j$ при всех $j=1,\ldots,m$, то по (5) имеем $\beta<c_1,\ldots,c_m>=\beta<a_1,\ldots,a_m>$. Так как $\beta a_j\in\{\alpha,\beta\}$ при всех $j=1,\ldots,m$, то по лемме 8 имеем $\beta<a_1,\ldots,a_m>=\alpha$ ввиду

того, что $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\beta$, $\alpha\neq\beta$ и $<a_1,\ldots,a_m>\in S_M$ – взаимно однозначное преобразование. Следовательно, $\beta<c_1,\ldots,c_m>=\beta<a_1,\ldots,a_m>=\alpha$. Точно так же получим $\alpha<c_1,\ldots,c_m>=\gamma$ и так как $\alpha b_j=\alpha c_j$ при всех $j=1,\ldots,m$, то $\alpha<b_1,\ldots,b_m>=\alpha<c_1,\ldots,c_m>=\gamma$. Лемма доказана.

Л е м м а 12. Пусть $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть $k,1\leq k\leq m$ некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha,\beta)$, $b_k=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $a_j=b_j=e$, если $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Тогда из $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\beta$ следует $\gamma_1<b_1,\ldots,b_m>=\gamma_2$.

Доказательство. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то $b_j=e$ при всех $j=1,\ldots,m$, и утверждение следует из (4). Предположим, что $\gamma_1\neq\gamma_2$.

Если $\gamma_1=\alpha$, то утверждение следует из предыдущей леммы, если же $\gamma_1\neq\alpha$, то обозначим $c_k=(\alpha\gamma_1)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<c_1,\ldots,c_m>=\gamma_1$, следовательно, $\gamma_1<c_1,\ldots,c_m>\neq\gamma_1$ и согласно лемме 8 имеем $\gamma_1<c_1,\ldots,c_m>=\alpha$. Согласно предыдущей лемме отсюда следует $\gamma_1<b_1,\ldots,b_m>=\gamma_2$. Лемма доказана.

Л е м м а 13. Если при некоторых $\alpha\in M$, $a_1,\ldots,a_m\in S_M$ имеем $\alpha<a_1,\ldots,a_m>\neq\alpha$, то существует индекс $k,1\leq k\leq m$ такой, что $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\alpha a_k$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_2\in M$ имеем $\gamma_1<c_1,\ldots,c_m>=\gamma_2$, где $c_k=(\gamma_1,\gamma_2)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$.

Доказательство. Если $\alpha<a_1,\ldots,a_m>\neq\alpha$, то согласно лемме 8 существуют индексы $i,1\leq i\leq m$ такие, что $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\alpha a_i$. Пусть $K=\{i,\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\alpha a_i\}$.

Если $|K|>1$, то обозначим $\alpha a_j=\beta_j$, $j=1,\ldots,m$. Ввиду (5) имеем $\alpha<a_1,\ldots,a_m>=\alpha<(\alpha\beta_1),\ldots,(\alpha\beta_m)>$ и, применяя $|K|-1$ раз лемму 10, получим, как и в случае $|K|=1$, что существует $k,1\leq k\leq m$, $\gamma\in M$, $c_1,\ldots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\ldots,c_m>=\gamma c_k\neq\gamma$ и $\gamma c_j\neq\gamma c_k$ при $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$. Обозначим $\gamma c_j=\delta_j$. Ввиду (5) имеем $\gamma<c_1,\ldots,c_m>=\gamma<(\gamma\delta_1),\ldots,(\gamma\delta_m)>$. Согласно лемме 9 получим теперь, что $\gamma<(\gamma\delta_1),\ldots,(\gamma\delta_m)>=\gamma<b_1,\ldots,b_m>=\delta_k$, где $b_k=(\gamma\delta_k)$, $b_j=e$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus k$, откуда согласно лемме 12 следует доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Т е о р е м а 14. Если $|M|>2$, то $F_{m+1}(S_M)=\{\varphi_0^m,\varphi_1^m,\ldots,\varphi_m^m\}$, где функции $\varphi_0^m,\ldots,\varphi_m^m$ определены следующим образом:

$$(a_1,\dots,a_m)\,\varphi_0^m = e$$
$$(a_1,\dots,a_m)\,\varphi_k^m = a_k,\quad 1\leqslant k\leqslant m$$

для всяких $a_1,\dots, a_m\in S_M$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha\in M$, $a_1,\dots,a_m\in S_M$ такие, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует k, $1\leqslant k\leqslant m$ такой, что $\beta<b_1, \dots, b_m) = \beta b_k$ при всяких $\beta\in M$, $b_1,\dots,b_m\in S_M$. Обозначим $\beta b_j=\beta_j$, $j=1,\dots,m$, тогда ввиду (5) имеем $\beta<b_1,\dots,b_m> = \beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>$; следовательно, достаточно доказать, что для всяких $\beta,\beta_1,\dots,\beta_m\in M$ $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)=\beta_k$.

Согласно лемме I3 существует k, $1\leqslant k\leqslant m$ такой, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_k$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_2\in M$ имеем $\gamma_1<c_1,\dots, c_m>=\gamma_2$, где $c_k=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Если $m=I$, то этим теорема доказана, поэтому предположим, что $m>1$.

Покажем, что если $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta'\neq\beta$, то $\beta'=\beta_k$. Предположим, что $\beta'\neq\beta_k$. Так как $\beta'\neq\beta$, то согласно лемме I3 существует ℓ, $1\leqslant\ell\leqslant m$ такой, что $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta(\beta,\beta_\ell)=\beta_\ell=\beta'$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_3\in M$ имеем $\gamma_3<c'_1,\dots, c'_m>=\gamma_1$, где $c'_\ell=(\gamma_1,\gamma_3)$ и $c'_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\ell$. Так как $\beta_\ell=\beta'$, $\beta_k\neq\beta$, то $k\neq\ell$. Выберем $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in M$ такие, что $\gamma_1\neq\gamma_2\neq\gamma_3\neq\gamma_1$ (ввиду $|M|>2$ это всегда возможно) и обозначим $c''_k=c_k$, $c''_\ell=c'_\ell$ и $e''_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\{k,\ell\}$. Так как $\gamma_2c''_j=\gamma_2c_j$, $\gamma_3c''_j=\gamma_3c'_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то по (5) имеем $\gamma_2<c''_1,\dots,c''_m>=\gamma_2<c_1,\dots,c_m>$, $\gamma_3<c''_1,\dots,c''_m>=\gamma<c'_1,\dots,c'_m>$.

Но так как $\gamma_2c_j\in\{\gamma_1,\gamma_2\}$ при всех $j=1,2,\dots,m$ и $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2$, то ввиду леммы 8 имеем $\gamma_2<c_1,\dots,c_m>=\gamma_1$, иначе, $\gamma_2<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2=\gamma_1<c_1,\dots,c_m>$, но $\gamma_1\neq\gamma_2$. Точно так же получим, что $\gamma_3<c'_1,\dots,c'_m>=\gamma_1$, следовательно, $\gamma_2<c''_1,\dots,c''_m>=\gamma_1=\gamma_3<c''_1,\dots,c''_m>$, что противоречит с $\gamma_2\neq\gamma_3$.

Этим доказано, что $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>\in\{\beta,\beta_k\}$. Если $\beta_k=\beta$, то утверждение доказано, поэтому предположим, что $\beta_k\neq\beta$. Пусть s – число тех β_j, $j=1,\dots m$, которые равны β_k. Применим индукцию по s.

Пусть $s=1$. Обозначим $d_k=(\beta,\beta_k)$, $d_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Согласно определению k имеем $\beta_k<d_1,\dots,d_m>=\beta$, но так как $\beta_k\neq\beta_j$ при $j\neq k$, $\beta_k\neq\beta$, то $\beta_kd_j=\beta_k(\beta,\beta_j)$ при всех $j=1,\dots,m$, следовательно, $\beta_k<(\beta,\beta_1),\dots,(\beta,\beta_m)>=\beta_k<d_1,\dots,d_m>=\beta$. Поэтому $\beta<(\beta,\beta_1),\dots,(\beta,\beta_m)>\neq\beta$ и остается только возможность

$\beta<(\beta,\beta_1),\dots,(\beta,\beta_m)>=\beta_k$, чем утверждение в случае $s=1$ доказано.

Пусть $s>1$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда число равных β_k элемент β_j, $j=1,\dots,m$ меньше s. Выбираем ℓ, $1\leqslant\ell\leqslant m$ такой, что $\ell\neq k$, $\beta_\ell=\beta_k$ и $\gamma\in M$ такой, что $\gamma\neq\beta$, $\gamma\neq\beta_k$. Обозначим $g_\ell=(\beta,\gamma)$, $g_j=(\beta,\beta_j)$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\ell$. Так как $\gamma\neq\beta_k$, то по предположению индукции $\beta<g_1,\dots,g_m>\beta_k$. Пусть $g'_\ell=(\beta\gamma\beta_k)$, $g'_j=g_j$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\ell$. Так как $\beta g_j=\beta g'_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то $\beta<g'_1,\dots,g'_m>=\beta<g_1,\dots,g_m>=\beta_k$, следовательно, $\beta_k<d'_1,\dots,d'_m>\neq\beta_k$, и так как $\beta_kg'_j\in\{\beta,\beta_k\}$ при всех $j=1,\dots,m$, то $\beta_k<d'_1,\dots,d'_m>=\beta$. Но $\beta_kg'_j=\beta_kg_j=\beta_k(\beta,\beta_j)$ при всех $j=1,\dots,m$, следовательно, $\beta_k<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta_k<g'_1,\dots,g'_m>=\beta$. Поэтому $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>\neq\beta$ и остается только возможность $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta_k$. Теорема доказана.

Назовем групповую систему Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ функции на множестве M симметрической, если основная группа преобразований $\bar{G}_A$ системы A – симметрическая группа S_M всех взаимно однозначных преобразований множества M. Из определения и из леммы 3 следует, что если A – симметрическая групповая система функции на множестве M, то M всегда замкнута для A.

Следствие I5. Всякая симметрическая групповая система Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ функции на множестве $|M|>2$ может быть задана при помощи симметрической группы S_M, множества индексов J и множества натуральных чисел $\{k_n, n\in J, 1\leqslant k_n\leqslant n\}$, если для всяких $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in M$, $a\in A_n$, $n\in J$ положить $\alpha_1\dots\alpha_na=\alpha_{n_k}\dots\alpha_{n_k}a=\alpha_{n_k}\circ\bar{a}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 6 указано, что если A – групповая система функции на множестве M и M замкнуто относительно A, то для всяких $\alpha_1,\dots\alpha_n\in M$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $\alpha_1\dots\alpha_na=\alpha_1\circ(g_1,\dots,g_{n-1})f_n^A\circ\bar{a}$, где $g_1,\dots,g_{n-1}\in\bar{G}_A$ такие, что $\alpha_1\circ g_1=\alpha_2,\dots,\alpha_1\circ g_{n-1}=\alpha_n$. Так как для симметрической групповой системы $\bar{G}_A=S_M$ и $f_n^A\in F_n(S_M)$, то $f_n^A\in\{\varphi_0^n,\dots,\varphi_n^n\}$ согласно предыдущей теореме. Если $f_n^A=\varphi_0^n$, то $\alpha_1\dots\alpha_na=\alpha_1\circ(g_1,\dots,g_{n-1})\varphi_0^n\circ\bar{a}=\alpha_1\circ e\circ\bar{a}=\alpha_1\circ\bar{a}$, если же $f_n^A=\varphi_k^n$, $1\leqslant k\leqslant n$, то $\alpha_1\circ(g_1,\dots,g_{n-1})\varphi_k^n\circ\bar{a}=\alpha_1\circ g_k\circ\bar{a}=\alpha_{k+1}\circ\bar{a}$.

Следствие доказано.

Литература

I. Е.С. Ляпин. Полугруппы. I960.

2. Я.В. Хион. m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. мат.ж., 1967, УШ, I74-I94.

3. Я.Н. Ярокер. Вполне простые Менгеровские оперативы. Х Всесоюзный алгебраический коллоквиум, т. II, Новосибирск I969, I38-I39.

J.Henno

Group-like Menger Systems

Summary

Menger systems and Menger systems of functions without non-trivial oneside ideals, called group-like, are described in terms of some group and system of functions on that group.