4. Interpoleerimine

Interpolatsioon on lõplikus arvus punktides antud funktsiooni jätkamine nende punktide vahele.

Olgu lõigul $[a, b]$ antud $n + 1$ punkti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

(*interpolatsioonisõlmed*). Interpolatsioonisõlmed moodustavad lõigul $[a, b]$ nn *võrgu*. Peale selle, olgu $f(x)$ mingi funktsioon, mille väärtused interpolatsioonisõlmedes on teada, st on antud $f(x_0), \ldots, f(x_n)$. Oletame, et funktsiooni f väärtused sõlmede vahel ei ole teada. Ülesanne on järgmine: leida mingisse tuntud funktsioonide klassi kuuluv funktsioon $\Phi(x)$, mis on määratud lõigul $[a, b]$ nii, et ta langeks kokku funktsiooniga $f(x)$ interpolatsioonisõlmedes, st

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \ j = 0, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Tingimusi (4.1) nimetatakse *interpolatsioonitingimusteks* ja funktsiooni $\Phi(x)$ *interpolandiks*. Interpolatsioonitingimused (4.1) garanteerivad, et interpolandi graafik läbib tabeliga etteantud punkte $P(x_i, f(x_i))$. Seega kujutab interpolant endast funktsiooni $f(x)$ "jätku" sõlmede vahele.

4.1. Interpoleerimine polünoomidega

Vaatleme juhtu, kui interpolant $\Phi(x)$ on ülimalt n-astme polünoom. Siis avaldub Φ kujul

$$\Phi_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \ldots c_n x + c_{n+1},$$

st sisaldab $n+1$ vaba kordajat $c_1, \ldots, c_{n+1}$. Kuna interpolatsioonitingimusi (4.1) on samuti $n + 1$ tükki, võib loota, et antud juhul on interpolatsiooniülesanne üheselt lahenduv. Tõepoolest, kehtib järgmine väide.

Teoreem. *Leidub parajasti üks ülimalt n-astme polünoom $\Phi_n(x)$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi (4.1).*

Nagu näeme, on interpolatsioonipolünoomi aste ühe võrra väiksem interpolatsioonisõlmede arvust (polünoomi aste on n ja sõlmi on $n+1$ tk). Kahele sõlmele vastab 1. astme polünoom e lineaarfunktsioon, kolmele sõlmele vastab 2. astme polünoom e ruutfunktsioon jne.

Praktilistes arvutustes kasutatakse interpolatsioonipolünoomi esitust nn diferentssuhete kaudu (Newtoni valemit).

Funktsiooni $f(x)$ väärtusi $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ kasutades saab arvutada selle funktsiooni nn *esimest järku diferentssuhted*

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

esimest järku diferentssuhteid kasutades *teist järku diferentssuhted*

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}$$

jne. Üldiselt avalduvad funktsiooni $f(x)$ *m-järku diferentssuhted* selle funktsiooni $m-1$-järku diferentssuhete kaudu järgmiselt:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Saab näidata, et funktsiooni $f(x)$ on diferentssuhteid kasutades võimalik interpolatsioonipolünoom esitada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) \\ + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Näiteks leiame tabeliga

x	1	2	3
y	1	-1	5

antud funktsiooni interpolatsioonipolünoomi. Diferentssuhete arvutamiseks on mugavam kirjutada tabel vertikaalselt:

x	y
1	1
2	-1
3	5

Antud ülesandes $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ja $y_0 = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 5$. Arvutame esimest järku diferentssuhted

$$f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = -2\,, \quad f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-1)}{3 - 2} = 6$$

ja kirjutame need tabeli 3. veergu:

x	y	I
1	1	
		-2
2	-1	
		6
3	5	

Esimest järku diferenssuhteid kasutades arvutame ka teist järku diferentssuhte

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{6 - (-2)}{3 - 1} = 4$$

ja kirjutame selle tabeli 4. veergu:

x	y	I	II
1	1		
		-2	
2	-1		4
		6	
3	5		

Polünoomi moodustamisel kasutatakse arve, mis jooksevad selles tabelis vasakult ülalt paremale alla (alla joonitud):

x	y	I	II
1	$\underline{1}$		
		$\underline{-2}$	
2	-1		$\underline{4}$
		6	
3	5		

Vastavalt valemile (4.2), on otsitav interpolatsioonipoünoom järgmine:

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= 1 + (-2) \cdot (x - x_0) + 4 \cdot (x - x_0)(x - x_1) = \\ &= 1 - 2(x - 1) + 4(x - 1)(x - 2).\end{aligned}$$

Peale lihtsustamist saame vastuseks $\Phi_2(x) = 4x^2 - 14x + 11$.

Sageli ei anna polünomiaalne interpolatsioon häid tulemusi. Nimelt kui polünoomi aste n on suur, siis võib esineda küllaltki suur ostsillatsioon (so võnkumine). Näiteks järgmisele 15-sõlmelisele tabelile

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5

vastav interpolatsioonipolünoom on kujutatud joonisel. Tabelis antud funktsiooni väärtused kõiguvad 1 ja 5 vahel, kuid interpolant võngub kuni -550-ni.

Taolisest puudusest on vaba tükiti polünomiaalne interpolatsioon ja interpolatsioon splainidega, mida käsitleme järgmises kahes alampeatükis.

4.2. Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Kõrgest polünoomi astmest tingitud ostsilleerimise vähendamiseks jagame lõigu $[a, b]$ väiksemateks osalõikudeks nii, et igal osalõigul oleks vähe intepolatsioonisõlmi ja konstrueerime interpolandi selliselt, et see oleks väikese astme polünoom igal taolisel osalõigul. Tulemusena tekib tükiti polünomiaalne interpolatsioon.

Vaatleme seda protseduuri täpsemalt. Jagame lõigu $[a, b]$ k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ja valime igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Konstrueerime funktsioonile $f(x)$ järgmise interpolandi $\Phi(x)$:

1. $\Phi(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$.

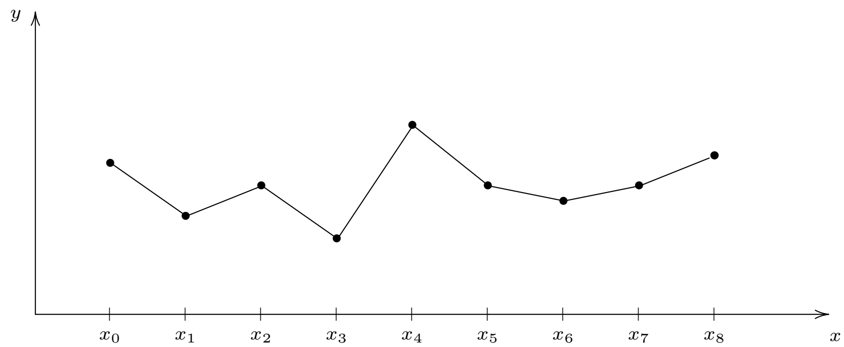
2. $\Phi(x)$ rahuldab interpolatsioonitingimusi sõlmedes $y_{i,j}$, st $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.

Tulemusena saame tükiti polünomiaalse interpolandi $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on $\Phi(x)$ liitepunktides x_i pidev, st

$$\lim_{x\to x_i^-}\Phi(x) = \lim_{x\to x_i^+}\Phi(x) = \Phi(x_i) = f(x_i).$$

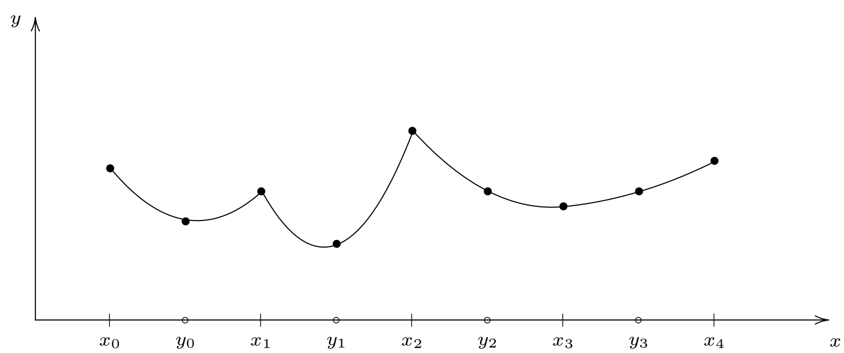
Käsitleme kahte erijuhtu.

1. *Tükiti lineaarne interpolatsioon.* Lihtsaim juht on $l = 1$. Siis koosneb interpolatsioonisõlmede hulk ainult punktidest $x_0, \ldots, x_n$ ja $\Phi(x)$ on lineaarne igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$. Näide $\Phi(x)$ kohta on toodud joonisel 4.1.



Joonis 4.1 : Tükiti lineaarne interpolant

2. *Ruutinterpolatsioon.* Kui $l = 2$, siis on igas vahemikus (x_i, x_{i+1}) antud veel üks sõlm y_i ja $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$. Näide on toodud joonisel 4.2.



Joonis 4.2 : Ruutinterpolant

4.3. Splainid. Interpoleerimine splainidega

Tükiti polünomiaalse interpoleerimise põhiline puudus on liitepunktides x_i esineda võiv $\Phi(x)$ tuletise katkevus. Tõepoolest, interpolatsioonitingimus punktis x_i garanteerib küll $\Phi(x)$ pidevuse, kuid mitte tema tuletise pidevust, st üldiselt võib kehtida võrratus $\lim\limits_{x\to x_i^-} \Phi'(x) \neq \lim\limits_{x\to x_i^+} \Phi'(x)$. Visuaalselt on tuletise katkevuspunktis täheldatav graafiku murdumine. Sileda interpolandi saamiseks tuleks ette anda ka teatud tingimused $\Phi(x)$ tuletise kohta sõlmedes x_i. Taolisi tingimusi rahuldavad kõrgema siledusastmega splainid.

Splain on tükiti polünomiaalne funktsioon, mis liitepunktides rahuldab teatud sileduse tingimusi.

Splaini täpne definitsioon on järgmine. Olgu lõik $[a, b]$ tükeldatud osalõikudeks sõlmedega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

l-järku *splainiks* siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

1. $S^{l,p}(x)$ ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$.
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p kaasa arvatud on pidevad vahemikus (a, b).

Seega on eelmises paragrahvis vaadeldud tükiti polünomiaalsed funktsioonid 0-järku splainid (nad on pidevad, kuid nende tuletised võivad katkeda). Joonisel 4.1 on kujutatud lineaarsplain $S^{1,0}(x)$ ja joonisel 4.2 ruutsplain $S^{2,0}(x)$. Praktikas on väga levinud kuupsplainid siledusastmega 2, so $S^{3,2}(x)$.

Splainiga interpoleerimisel võetakse tavaliselt sõlmedeks splaini liitepunktid x_i. Seega on interpolatsioonitingimused järgmised:

$$S^{l,p}(x_i) = f(x_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n.$$