Mittelineaarsete võrrandite ja süsteemide lahendamine

Võrrandi $f(x) = 0$ lahendamiseks saab kasutada käske fzero ja fsolve. Neil on sarnane kuju:

fzero(f,*algl䨥nd*)

fsolve(f,*algl䨥nd*)

Nende kahe käsu vahe on selles, et fsolve on võimsam ja sellega on võimalik lahendada ka mittelineaarseid süsteeme. Käsk fzero on olemas Matlabi põhipaketis. Käsk fsolve puudub Matlabi põhipaketist, kuid sisaldub Optimization toolbox-is, mis tuleks soovi korral põhipaketile juurde osta. Tasuta tarkvaras Octave on olemas mõlemad käsud fzero ja fsolve.

Käskudes sisalduv alglähend tuleb valida otsitava lahendi lähedalt. Selleks sobib kasutada graafikut. Kui lahendeid on ainult üks, ei ole alglähendi valik oluline. Matlab-Octave leiab ise sobiva iteratsioonimeetodi vaadeldava võrrandi lahendamiseks.

NÄITEÜLESANNE 1. Lahendada võrrand $te^t = 5$ alglähendiga 0.

Lahendus. Kirjutame võrrandi ümber järgmiselt: $te^t - 5 = 0$. Seega tuleb lahendada võrrand $f(t) = 0$, kus $f(t) = te^t - 5$. Koostame järgmise skripti:

```
%Defineerime funktsiooni f
f=@(t)t*exp(t)-5;
%Lahendame võrrandi f(t)=0
fzero(f,0)
```

Loomulikult võib viimasel real fzero asemel olla ka fsolve. Salvestame ja käivitame skripti. Kuvatakse vastus ans=1.3267

Funktsiooni tähis f ei ole kohustuslik. Viimase ülesande võime lahendada ka mingit muud funktsiooni tähist kasutades. Näiteks kui me tähistaksime funktsiooni $te^t - 5$ sümboliga z1, oleks skript järgmine:

```
%Defineerime funktsiooni z1
z1=@(t)t*exp(t)-5;
%Lahendame võrrandi z1(t)=0
fzero(z1,0)
```

NÄITEÜLESANNE 2. Leida võrrandi $x^3 - 6x^2 + 3\arctan x + 3 = 0$ kõik lahendid.

Lahendus. Alustame sellest, et teeme kindlaks kui palju on lahendeid ja leiame iga lahendi lähedalt mingi arvu, mis sobib alglähendiks. Selle jaoks võib kasutada mitmeid meetodeid. Valime graafilise meetodi. Seega tuleb joonestada funktsiooni $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3\arctan x + 3$ graafik. Kasutame käsku fplot. Vastav skript võiks olla järgmine:

```
fplot('x^3-6*x^2+3*atan(x)+3',[a,b])
grid on
```

kus lõigu otspunktid a ja b tuleks valida nii, et kõik lahendid oleks näha. Erinevaid a ja b väärtusi varieerides jõuame järeldusele, et võrrandil on 3 lahendit. Konkreetselt olgu siinkohal toodud graafik lõigul $[-2, 7]$, st $a = -2$ ja $b = 7$ korral. Graafikult näeme, et funktsioon läbib horisonaalset nulljoont punktide $x = -0.5$, $x = 1$ ja $x = 5.5$ lähedalt. Lahendamegi võrrandit nende kolme erineva alglähendiga. Vastav skript (koos eelneva graafiku joonestamisega) oleks järgmine:

```
%Funktsiooni graafiku joonestamine
fplot('x^3-6*x^2+3*atan(x)+3',[-2,7])
```

```
grid on
%Funktsiooni defineerimine käsu fzero jaoks
f=@(x)x^3-6*x^2+3*atan(x)+3;
%Võrrandi lahendamine kolme erineva alglähendiga
lahend1=fzero(f,-0.5)
lahend2=fzero(f,1)
lahend3=fzero(f,5.5)
```

Matlab-Octave annab järgmised vastused: lahend1= -0.4983 lahend2=1.0464 lahend3=5.7849

HARJUTUSÜLESANNE 1. Leida võrrandi $\frac{10\sin t}{t} - 1 = 0$ kõik lahendid. Vastav skript salvestada nime z30.m all.

Lahendus

HARJUTUSÜLESANNE 2. Leida võrrandi $r^3 + 0.5 = \sqrt[3]{r}$ kõik positiivsed lahendid. Vastav skript salvestada nime z31.m all.

Lahendus

HARJUTUSÜLESANNE 3. Silindrilise tihvti diameeter sõltub temperatuurist järgmisel viisil:

$$d = 0.92 + 5 \cdot 10^{-3}T + 4 \cdot 10^{-5}T^3\,,$$

kus d on diameeter (cm), T on temperatuur (°C). Selleks, et paigutada tihvti detaili avausse, on vaja jahutada teda kuni diameetrini $d = 0.9$cm. Leida jahutamistemperatuur. Vastav skript salvestada nime z32.m all.

Lahendus

Sama asi vene keeles:

Диаметр цилиндрического штифта зависит от температуры следуюшим образом:

$$d = 0.92 + 5 \cdot 10^{-3}T + 4 \cdot 10^{-5}T^3\,,$$

где d - диаметр (cm), T - температура (°C). Для того чтобы поместить штифт в отверстие детали нужно охлаждать его до $d = 0.9$cm. Найти температуру охлаждения. Скрипт записать в фаил z32.m

Решение

Käsitleme ka mittelineaarsete süsteemide lahendamist. Olgu vaadeldav süsteem antud kujul $F(x) = 0$, kus F on vektorfunktsioon ja x on otsitav vektor. Seetõttu enne kui siirdume süsteemide lahendamise juurde, peame vaatlema vektorfunktsioonide defineerimist Matlab-Octaves. Me teame juba, et funktsiooni saab defineerida järgmise käsuga:

funkts. sümbol=@(*argumendi sümbol,argumendi sümbol,...*)*funkts. valem*

Näiteks funktsiooni $f(x) = cos(x) + 3x$ saab defineerida käsuga

```
f=@(x)cos(x)+3*x
```

Ühtlasi teame ka seda, et vektorit on võimalik sisestada nii, et kirjutame tema komponendid nurksulgude vahele ja eraldame komadega. Näiteks vektori $b = (2, 6, 1)$ saab sisestada järgmise käsuga:

```
b=[2,6,1]
```

Vektorfunktsiooni defineerimisel tulebki tema valem kirja panna kui vektor, st funktsiooni erinevate komponentide valemid eraldada komadega ja ümbritseda nurksulgudega.

NÄITEÜLESANNE 3. Defineerida kahe muutuja vektorfunktsioon $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, kus $f_1(x) = x_1^2 + x_2$ ja $f_2(x) = \sin(x_1x_2)$ ning arvutada $F(1, 4)$.

Lahendus. Skript on järgmine:

```
%Funktsiooni defineerimine
F=@(x)[x(1)^2+x(2),sin(x(1)*x(2))];
%Funktsiooni väärtuse arvutamine
vastus=F([1,4])
```

Peale skripti käivitamist saame vastuse

```
vastus =
     5.0000 -0.7568
```

See tähendab, et $F(1,4) = (5.0000, -0.7568)$. Märkus: skripti viimases käsus on funktsiooni F argument samuti vektor, st Matlab-Octaves tuleb ta esitada kujul [1,4] .

Harjutusülesanne 4. Defineerida $G(z) = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))$, kus $g_1(z) = z_1 + z_2$, $g_2(z) = z_1 z_3$ ja $g_3(z) = \frac{z_2}{z_3}$ ning arvutada $Q = G(1,2,3) + G\big(g_2(1,1,1), g_3(2,2,2), g_1(4,4,4)\big)$. Skript salvestada nime z33.m all.

Skript

Vastus: $Q = (5, 3, 0.7917)$.

Nagu varem öeldud, sobib mittelineaarsete süsteemide $F(x) = 0$ lahendamiseks käsk fsolve. Viimase kuju on järgmine:

fsolve(F,*alglähend*)

Alglähend on jällegi soovitav valida otsitava lahendi lähedalt. Matlab-Octave leiab ise sobiva iteratsioonimeetodi süsteemi lahendamiseks.

Kahest võrrandist koosneva kahe tundmatuga süsteemi alglähendi leidmiseks saab kasutada graafilist meetodit. Siis on süsteemis $F(x) = 0$ esineval vektorfunkutsioonil 2 komponenti, so $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, kusjuures $x = (x_1, x_2)$ ning süsteem on esitatav kujul

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Seega lahendid esinevad joonte $f_1(x_1, x_2) = 0$ ja $f_2(x_1, x_2) = 0$ lõikumiskohtades.

Näiteülesanne 4. Leida süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y + x = 2(y - x)^2 \end{cases}$$

kõik lahendid.

Lahendus. Kõigepealt joonestame süsteemis antud funktsioonide graafikud ja leiame neilt lahendite ligikaudsed asukohad. Selleks koostame skripti:

```
ezplot('x^2/4+y^2-1')
grid on
hold on
ezplot('x+y-2*(y-x)^2')
hold off
```

ja käivitame (NB! teises käsus ezplot peame muutuja x esimesele kohale tõstma, kui me tahame, et see muutuja asuks horisontaalteljel). Saadud jooniselt näeme, et süsteemil on 2 lahendit ja need asuvad ligikaudu punktides koordinaatidega $x = 0.4, y = 1$ ja $x = 1.5, y = 0.6$. Need punktid võtamegi alglähenditeks. Käsu fsolve kasutamisel peame aga arvestama sellega, et see sisaldab vektorfunktsiooni. Seega me peame muutujatest x ja y moodustama vektori. Olgu selleks z. See tähendab, et $z_1 = x$ ja $z_2 = y$. Süsteemi lahendamiseks sobiv skript võiks välja näha nii:

```
F=@(z)[z(1)^2/4+z(2)^2-1,z(1)+z(2)-2*(z(2)-z(1))^2]
Lahend1=fsolve(F,[0.4,1])
Lahend2=fsolve(F,[1.5,0.6])
```

Peale käivitamist kuvatakse järgmine tulemus:

```
Lahend1 =
    0.21621   0.99414
Lahend2 =
    1.63032   0.57924
```

See tähendab, et süsteemil on järgmised 2 lahendit: $x_1 = 0.21621$, $y_1 = 0.99414$ ja $x_2 = 1.63032$, $y_2 = 0.57924$.

Harjutusülesanne 5. Leida süsteemi

$$\begin{cases} x = \sin(x-t)^2 - t, \\ x = \sin(t-x) - t \end{cases}$$

kõik lahendid, mis asuvad ristkülikus $1 \le t \le 5$, $-5 \le x \le 0$. Skript salvestada nime z34.m all.

Lahendus

Harjutusülesanne 6. Piirkonnas $-2 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 3$ paikneb ristkülikukujuline plaat, mis on äärtest kinnitatud. Plaadile on asetatud raskus. Plaadi läbipaine punktis $P(x, y)$ on antud valemiga

$$u = 0.0001(4 - x^2)(9 - y^2)(xy + x + 2y + 15).$$

Suurused x, y ja u on antud meetrites. Leida plaadi maksimaalne läbipaine ja punkt, kus see saavutatakse. Skript salvestada faili z35.m.

Lahendus

Sama asi vene keeles:

В области $-2 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 3$ находится прямоугольная пластина закрепленная по краям. На пластину наложена тяжесть. Изгиб пластины в точке $P(x, y)$ дается формулой

$$u = 0.0001(4 - x^2)(9 - y^2)(xy + x + 2y + 15).$$

Величины x, y и u заданы в метрах. Найти максимальный изгиб пластины и точка в которой это достигается. Скрипт записать в фаил z35.m.

Решение