1. Vigade tekkimine, liigid ja edasikandumine arvutustes

1.1. Vead ja nende liigid

Kui me lahendame mingit praktikast kerkinud matemaatilist ülesannet, siis saame ülesande lahendi reeglina vaid ligikaudselt, st veaga. Lähtudes vigade tekkepõhjustest, võib need jaotada tinglikult kolmeks: matemaatilise formuleeringu vead, meetodite vead ja ümardamisvead.

1. *Matemaatilise formuleeringu viga.* Ükski matemaatiline mudel ei ole absoluutselt täpne. Füüsikaliste, sotsiaalsete jm protsesside matemaatilisel kirjeldamisel tehakse neis protsessides alati teatud lihtsustusi.

   Näiteks keha langemisel maa raskusväljas on kõige lihtsamas lähenduses kiirendus võrdne raskuskiirendusega. Seega kehtib võrrand $v' = g$, millest integreerimisel saame avaldada kiiruse:

   $$v(t) = \int_0^t g\, d\tau = gt + v_0,$$

   kus v_0 on algkiirus. Mudel on ligikaudne, kuna arvestatud ei ole õhutakistust. Koostame täpsema mudeli, mis arvestab viimast. Kui õhutakistus lugeda proportsionaalseks kiiruse ruuduga, on kehale mõjuv jõud võrdne kahe liidetava summaga, millest esimene on raskusjõud $F_1 = mg$ ja teine on takistusjõud $F_2 = -kv^2$, kus k on konstant. Seega on kogujõud võrdne $F = F_1 + F_2$. Newtoni teise seaduse põhjal $F = ma = mv'$. Saame järgmise võrrandi kiiruse suhtes:

   $$mv' = mg - kv^2.$$

   Tegemist on diferentsiaalvõrrandiga, kuna see sisaldab otsitava funktsiooni v tuletist. Saadud mudel ei ole ka absoluutselt täpne, sest takistusjõu valem $f_2 = -kv^2$ on ligikaudne.

   Matemaatilise formuleeringu vigade hulka võib liigitada kai ülesande algandmete mõõtmisel tehtud vead.

2. *Meetodi viga.* Matemaatilise modelleerimise ülesannete lahendusmeetodid jagunevad kahte rühma:
   täpsed meetodid – lõpliku arvu tehete sooritamisega saadakse ülesande täpne lahend,
   ligikaudsed meetodid – lõpliku arvu tehete sooritamisega saadakse ülesande ligikaudne lahend. Ligikaudset meetodit iseloomustab meetodi viga. Selleks on ligikaudse ja täpse lahendi vahe.

Näiteks ruutvõrrandi $x^2 - 3x + 2 = 0$ saame me lahendada täpselt (lahendid $x_1 = 1, x_2 = 2$) kasutades selleks teada-tuntud ruutvõrrandi lahendi valemit. Lahendi valemid on olemas ka kuup- ja neljanda astme võrrandi jaoks, kuid polünomiaalsete võrrandite jaoks, mille aste on 4st suurem, puuduvad üldised lahedusvalemid. Praktikas on suhteliselt vähe selliseid võrrandeid, mida saab lahendada täpselt. Enamasti tuleb leppida sellega, et lahend saadakse ligikaudselt teatud täpsusega.

3. *Ümardamisviga.* Aritmeetiliste tehete teostamisel arvutis tuleb sooritada ümardamisi. Näiteks kui arvuti on programmeeritud säilitama arve pikkusega, mis kümnendsüsteemis hõlmab 8 tüvenumbrit, siis arvude 123456 ja 123456 korrutamisel väljastab ta ligikaudse tulemuse

$$123456 \times 123456 \approx 15241384\,E{+}03.$$

Absoluutne ja relatiivne viga. Olgu $\widetilde{a}$ arvu a ligikaudne väärtus. Ligikaudse arvu $\widetilde{a}$ *viga* on sellisel juhul ligikaudse ja täpse väärtuse vahe, st $\widetilde{a} - a$.

Praktikas ei ole arvu a täpne väärtus teada. Seega ei ole võimalik täpselt arvutada ka viga $\widetilde{a} - a$. Seevastu on sageli võimalik hinnata vea absoluutväärtust mingi arvuga (mõõteseadme vea ülempiir, meetodi vea hinnang, ümardamisvea ülempiir jne). Ligikaudse arvu $\widetilde{a}$ *absoluutseks veaks* nimetatakse suvalist positiivset arvu ϵ, mille korral on täidetud võrratus

$$|\widetilde{a} - a| \leq \epsilon.$$

Mõnikord on vaja võrrelda aboluutset viga arvu enda väärtusega. Sellisel juhul arvutatakse nn relatiivne viga. Ligikaudse arvu $\tilde{a}$ *relatiivseks veaks* nimetatakse suvalist positiivset arvu δ, mis rahuldab võrratust

$$\left| \frac{\widetilde{a} - a}{\widetilde{a}} \right| \leq \delta.$$

Paneme tähele, et kui ϵ on absoluutne viga, siis kehtivad järgmised seosed:

$$\left| \frac{\widetilde{a} - a}{\widetilde{a}} \right| \leq \frac{\epsilon}{|\widetilde{a}|}.$$

Seega sobib relatiivseks veaks võtta $\delta = \epsilon |\widetilde{a}|^{-1}$.

Relatiivset viga märgitakse sageli ka protsentides. Kui relatiivne viga suhtarvuna on δ, siis protsentidena on ta $R = 100\delta\%$.

Märgime siinkohal veel, et absoluutne viga on seotud füüsikalise suuruse dimensiooniga ja tema arvuline väärtus muutub üleminekuga ühest mõõtühikute süsteemist teise. Relatiivne viga seevastu on dimensioonita suurus. Näiteks kui 100 m pikkuse objekti mõõtmisel tehtav absoluutne viga on 1 cm, siis CGS-süsteemis on see viga 1 cm ja SI-süsteemis 0.01 m. Relatiivne viga on aga süsteemist sõltumatult alati 0.0001 ehk 0.01%.

1.2. Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni $u = u(x_1, \ldots, x_m)$ väärtus, kui argumendid $x_1, \ldots, x_m$ on antud ebatäpselt. Tähistame argumentide $x_1, \ldots, x_m$ ligikaudseid väärtusi $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m$-ga. Siis on argumentide $x_1, \ldots, x_m$ vead järgmised:

$$\Delta x_i = \widetilde{x}_i - x_i\,,\ i = 1, \ldots, m.$$

ja kehtib $\widetilde{x}_i = x_i + \Delta x_i$. Ligikaudsete argumentidega arvutatud u väärtuse viga on seega

$$\begin{aligned}\Delta u\ &=\ u(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m) - u(x_1, \ldots, x_m) = \\ &=\ u(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Tuletame valemid suuruse u absoluutse ja relatiivse vea jaoks.

Valemist (1.1) on näha, et u viga võrdub u täismuuduga. Kuna väikeste argumendi muutude korral on funktsiooni täismuut ligikaudselt võrdne tema täisdiferentsiaaliga, siis

$$\Delta u\ \approx\ du\ =\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)\Delta x_i\,. \tag{1.2}$$

Valem (1.2) sisaldab argumentide täpseid väärtusi x_i ja vigu Δx_i, mis ei ole teada. Seega ei ole see valem taolisel kujul praktiliselt rakendatav. Asendame selles valemis argumentide täpsed väärtused x_i nende ligikaudsete teadaolevate väärtusetega $\widetilde{x}_i$ ja hindame vigu Δx_i. Kuna $x_i \approx \widetilde{x}_i$, siis funktsiooni u pidevate osatuletiste korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m). \tag{1.3}$$

Tehes asenduse (1.3) valemis (1.2), saame

$$\Delta u\ \approx\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\Delta x_i\,. \tag{1.4}$$

Olgu argumendi x_i teadaolev aboluutne viga ϵ_{x_i}, st $|\Delta x_i| \le \epsilon_{x_i}$. Kasutades seda seost ja absoluutväärtuse omadusi, hindame avaldist (1.4):

$$\begin{aligned}|\Delta u|\ &\approx\ \left|\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\Delta x_i\right| = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| |\Delta x_i| \le \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| \epsilon_{x_i}.\end{aligned}$$

Järelikult

$$|\Delta u| \le \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| \epsilon_{x_i}.$$

Selle valemi parem pool on praktiliselt arvutatav, kuna seal esinevad ainult teadaolevad suurused. Seega võib suuruse u absoluutseks veaks võtta

$$\epsilon_u\ =\ \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| \epsilon_{x_i}. \tag{1.5}$$

Tuletame ka valemi u relatiivse vea jaoks. Kuna relatiivse vea võib arvutada absoluutse vea ja absoluutväärtuse jagatisena, siis $\delta_{x_i} = \frac{\epsilon_{x_i}}{|\widetilde{x}_i|}$ ja $\delta_u = \frac{\epsilon_u}{|u(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)|}$. Seega (1.5) põhjal avaldub u relatiivne viga järgmiselt:

$$\begin{aligned}\delta_u\ &=\ \frac{\epsilon_u}{|u(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)|} = \frac{1}{|u(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| \epsilon_{x_i} = \\ &= \frac{1}{|u(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\right| |\widetilde{x}_i|\delta_{x_i}\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Vaatleme mõnda erijuhtu.

1. *Liitmine ja lahutamine.* Olgu $u = x_1 \pm x_2$.

   Siis $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \pm 1$ ja $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = 1$. Valemitest (1.5) ja (1.6) saame u vigade jaoks järgmised avaldised:

   $$\text{absoluutne viga:} \qquad \epsilon_u = \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2}\,,$$

   $$\text{relatiivne viga:} \qquad \delta_u = \frac{|\widetilde{x}_1|\delta_{x_1} + |\widetilde{x}_2|\delta_{x_2}}{|\widetilde{x}_1 \pm \widetilde{x}_2|}\,.$$

   Järelikult liitmisel ja lahutamisel absoluutsed vead liituvad.

   Oluline on siinkohal märkida, et kui $\widetilde{x}_1$ ja $\widetilde{x}_2$ on omavahel ligikaudselt võrdsed, siis lahutamisel relatiivne viga oluliselt suureneb. Näiteks kui $\widetilde{x}_1 = 101$, $\widetilde{x}_2 = 100$, $\delta_{x_1} = \delta_{x_2} = 0.01$, siis $\delta_u = \frac{101\times 0.01+100\times 0.01}{101-100} = 2.01$.

2. *Korrutamine ja jagamine.* Korrutamise $u = x_1 x_2$ korral

   $\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$ ja valemitest (1.5) ja (1.6) saame

   $$\text{absoluutne viga:} \qquad \epsilon_u = |\widetilde{x}_2|\epsilon_{x_1} + |\widetilde{x}_1|\epsilon_{x_2}\,,$$

   $$\text{relatiivne viga:} \qquad \delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}\,.$$

   Seega korrutamisel relatiivsed vead liituvad.

   Jagamistehte $u = \frac{x_1}{x_2}$ korral

   $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$, millest tuleneb et

   $$\text{absoluutne viga:} \qquad \epsilon_u = \frac{1}{|\widetilde{x}_2|}\epsilon_{x_1} + \frac{|\widetilde{x}_1|}{|\widetilde{x}_2|^2}\epsilon_{x_2}$$

   $$\text{relatiivne viga:} \qquad \delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}\,.$$

   Jagamisel relatiivsed vead liituvad samuti.