8. Diferentsiaalvõrranditega seotud põhimõisted

Diferentsiaalvõrrand on võrrand, mis sisaldab tuletisi või diferentsiaale otsitavatest funktsioonidest. Näiteks

$$x - u''' + u' + u^2 = 0 \tag{8.1}$$

või

$$x^2 du = (u - x)dx, \tag{8.2}$$

kus $u(x)$ on otsitav funktsioon või

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \frac{\partial}{\partial y} v = v, \tag{8.3}$$

kus $v(x, y)$ on otsitav funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandi *järguks* nim selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Näiteks võrrand (8.1) on 3. järku, võrrand (8.2) 1. järku ja võrrand (8.3) 2. järku.

Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit *harilikuks diferentsiaalvõrrandiks* (HDV). Näiteks (8.1) ja (8.2) on HDV-d. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, millest tulenevalt esinevad võrrandis osatuletised, siis nim seda võrrandit *osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks* (ODV). Näiteks (8.3) on ODV.

8.1. HDV lahendid

Diferentsiaalvõrrandi *lahend* on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Märgime, et diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv. See tähendab, et lahendeid on palju. Näiteks 1. järku HDV

$$u' = \cos x$$

lahenditeks on kõik funktsioonid kujul $u = \sin x + C$, kus C on suvaline konstant. Seevastu 2. järku võrrandit

$$u'' = \cos x$$

tuleb kaks korda integreerida, seega sõltub selle lahend kahest konstandist. Tõepoolest, esmakordsel integreerimisel saame $u' = \sin x + C_1$ ja teistkordsel integreerimisel avaldame lahendi $u = -\cos x + C_1 x + C_2$, kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Üldiselt n. järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.

n. järku HDV *üldlahendiks* nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. *Erilahendiks* nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendi graafikut nim selle võrrandi *integraalkõveraks.* Seega võib n. järku HDV üldlahendit geomeetriliselt tõlgendada kui n parameetrist sõltuvat integraalkõverate parve.

8.2. Esimest järku HDV. Cauchy ülesanne

1. järku HDV *üldkuju* on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0\,,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon. Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu ilmutatud, siis öeldakse, et see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV *normaalkuju* järgmine:

$$u' = f(x, u)\,, \tag{8.4}$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Vaatleme normaalkujulist 1. järku HDV-d (8.4). Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C. Erilahendi määramiseks peame järelikult lisama sellele võrrandile mingi lisatingimuse.

Olgu fikseeritud konkreetne x väärtus $x = x_0$. Anname punktis x_0 ette lahendi väärtuse u_0, st

$$u(x_0) = u_0\,.$$

Koos võrrandiga (8.4) tekib järgmise ülesanne:

$$u' = f(x, u)\,, \quad u(x_0) = u_0\,. \tag{8.5}$$

Seda ülesannet nimetatakse *Cauchy* e *algtingimustega ülesandeks* esimest järku HDV-le. On teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on Cauchy ülesandel (8.5) parajasti üks lahend.

8.3. Näiteid HDV kohta

1. *Keha liikumine kiirusest sõltuva takistuse korral.* Mõjugu kehale kaks vastandlikku jõudu: rakendatud jõud F_r ja takistusjõud F_t. Siis avaldub kogujõud valemiga $F = F_r - F_t$. Arvestades, et $F = ma$ ja $a = v'$, kehtib kiiruse tuletise jaoks järgmine valem:

$$mv' = F_r - F_t\,.$$

Eeldame nüüd, et takistusjõud on proportsionaalne kiirusega, st $F_t = kv^2$, kus k on kostant. Sel juhul saame järgmise seose:

$$mv' = F_r - kv^2\,. \tag{8.6}$$

Tegemist on 1. järku HDV-ga kiiruse jaoks. Sel võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Tõepoolest: keha kiirus mingil ajahetkel $t > 0$ sõltub lisaks rakendatud jõule ka kiirusest alghetkel $t = 0$. Mida suurem on kiirus alghetkel, seda suurem on v väärtus ka edaspidi. Lisame võrrandile (8.6) algtingimuse $v(0) = v_0$. Tulemusena saame Cauchy ülesande:

$$mv' = F_r - kv^2\,, \quad v(0) = v_0.$$

Sellel on vaid üks lahend.

2. *Newtoni jahtumisseadus.* Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T. Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_e. Aega tähistame nagu ikka t-ga. Kui $T < T_e$, siis hakkab keha jahtuma, st temperatuur T kahaneb ajas. Seega on funktsiooni $T(t)$ tuletis negatiivne: $T'(t) < 0$. Mida suurem on sise ja välistemperatuuri vahe, seda kiiremini keha jahtub ehk seda väiksem on T tuletis. Viimase tähelepaneku saab matemaatiliselt kirja panna selliselt, et $-T'$ on võrdeline sise- ja välistemperatuuride vahega:

$$-T' = \kappa(T - T_e), \tag{8.7}$$

kus κ on positiivne konstant (soojusvahetustegur). Võrrandi (8.9) näol on tegemist HDV-ga. Jällegi on sel võrrandil lõpmata palju lahendeid. Keha temperatuur mingil ajahetkel $t > 0$ sõltub lisaks välistemperatuurile T_e ka temperatuurist alghetkel $t = 0$. Mida suurem on temperatuur alghetkel, seda suurem on T väärtus ka edaspidi. Lisame võrrandile (8.9) algtingimuse ja saame järgmise Cauchy ülesande:

$$-T' = \kappa(T - T_e)\,, \quad T(0) = T_0. \tag{8.8}$$

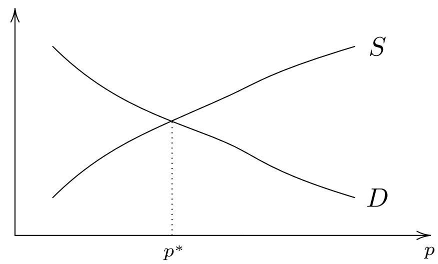
Viimasel on ainult üks lahend.

Olgu veel märgitud, et kui vaadeldavas kehas toimub mingi soojusttootev (nt elektriline) protsess, siis on HDV järgmine:

$$-T' = \kappa(T - T_e) + q, \tag{8.9}$$

kus q on soojusallikate tihedus.

3. *Evansi hinnamudel.* Olgu vaatluse all mingi kaup, mille hind on p. Kauba pakkumine olgu S ja nõudlus D. Aeg olgu t. Hinna kasvades pakkumine suureneb ja nõudlus väheneb (vt joonist 8.1).



Joonis 8.1 : Nõudmine ja pakkumine

Tasakaalupunktis $p = p^*$ on nõudlus ja pakkumine omavahel võrdsed. Oletame, et $p < p^*$. Siis nõudlus ületab pakkumise, st $D - S > 0$. Sellistes tingimustes hakkab hind ajas kasvama, st $p'(t) > 0$. Hind kasvab seda kiiremini, mida suurem on nõudluse ja pakkumise vahe $D - S$. Teatavas lähenduses võimegi hinna kasvu kiiruse lugeda proportsionaalseks suurusega $D - S$. See tähendab, et kehtib võrrand

$$p' = k(D - S)\,,$$

kus k on konstant. Tegemist on 1. järku HDV-ga hinna p suhtes. Seda nimetatakse Evansi hinnamudeliks.

4. *Siirdeprotsessid elektriahelates.* Alalis- ja vahelduvvooluahelate arvutamiseks on olemas algebralised meetodid, mis on suhteliselt lihtsad ja ei vaja diferentsiaalvõrrandite lahendamist. Olukord muutub, kui ahel lülitatakse ühelt rezhiimilt teisele. Näiteks vahelduvvooluahela sisse- ja väljalülitamisel toimub üleminek 0-vooluga alalisvoolurezhiimilt vahelduvvoolurezhiimile ja vastupidi. Taoliste siirde(ehk ülemineku)protsessides muutub vool teatud aja jooksul keerukama seaduspärasuse järgi. Voolufunktsiooni saab kätte lahendades sobiva HDV.

Vaatleme Skeemil 4 toodud ahelas toimuvat lülitusprotsessi. Pinge takisti klemmidel on $U_R = Ri$. Pinge induktiivelemendi klemmidel on $U_L = Li'$. Vastavalt Kirchoffi teisele seadusele kehtib võrdus $U_L + U_R = e$. Seega saame järgmise HDV:

$$Li' + Ri = e. \tag{8.10}$$

Lahendi üheseks määramiseks peame teadma ka voolu väärtust alghetkel (so lülitushetkel). Ilmselt on vaadeldavas protsessis algvool nulliga. Kokkuvõttes tekib järgmine Cauchy ülesanne:

$$Li' + Ri = e\,, \quad i(0) = 0.$$

Kui lisaks takistile ja induktiivelemendile on ahelasse järjestikku ühendatud ka kondensaator, siis tuleb summarses pinges arvesse võtta ka kondensaatori pinget $U_C = \frac{q}{C}$, kus q on kondensaatori laeng. Seega Kirchoffi teise seaduse põhjal kehtib võrdus $U_L + U_R + U_C = e$, millest saame järgmise seose:

$$Li' + Ri + \frac{q}{C} = e. \tag{8.11}$$

Kuna $q' = i$, siis võrduse (8.11) diferentseerimisel tekib 2. järku HDV:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = e'. \tag{8.12}$$