9. HDV Cauchy ülesannete ligikaudne lahendamine

Käesolevas peatükis vaatleme ligikaudseid meetodeid 1. järku harilike diferentsiaalvõrrandite (HDV) Cauchy ülesannete lahendamiseks.

1. järku normaalkujulise HDV Cauchy ülesanne on järgmine:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \ \ t \in \mathbb{R}\,, \quad u(t_0) = u_0\,, \tag{9.1}$$

kus t_0 ja u_0 on etteantud arvud ja $f(t, u)$ on mingi kahemuutuja funktsioon. Enamik ligikaudseid meetodeid ülesande (9.1) lahendamiseks on üles ehitatud järgmisel põhimõttel. Fikseeritakse mingid sõlmed

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$$

ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

nii, et $u_i \approx u(t_i)$. Võib liikuda ka punktist t_0 negatiivses suunas, st fikseerida sõlmed $t_0 > t_1 > t_2 > t_3 > \dots$ ja määrata $u_i \approx u(t_i)$. Viimast juhtu me eraldi käsitlema ei hakka. Negatiivses suunas antud ülesande saab lihtsa muutuja vahetusega teisendada positiivses suunas antud ülesandeks.

Üldiselt toimub suuruste u_i arvutamine rekursiivselt, st u_{i+1} arvutatakse eelnevate väärtuste $u_i, u_{i-1}, \dots$ põhjal. Siinkohal võib meetodid jagada kaheks. *Ühesammuliste* meetodite puhul kasutatakse u_{i+1} arvutamiseks ainult eelnevat väärtust u_i. *Mitmesammuliste* meetodite puhul kasutatakse u_{i+1} arvutamiseks väärtusi $u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-k+1}$, kus $k > 1$ (k on meetodi samm). Kuna alguses on teada ainult u_0, tuleb k-sammulise meetodi algväärtuste $u_1, \dots, u_{k-1}$ leidmiseks alguses kasutada ühesammulist või k-st väksema sammuga meetodit.

Järgnevates alampeatükkides eeldame lihtsuse mõttes, et sõlmed on võrdsete vahedega, st $t_i - t_{i-1} = h$, kus $h > 0$.

9.1. Euleri meetod

Kirjutame võrrandi (9.1) üles punktis t_i, st

$$u'(t_i) = f(t_i, u(t_i))$$

ja asendame seal esineva tuletise diferentsvalemiga sammuga ette, st

$$u'(t_i) \approx \frac{1}{h}(u(t_{i+1}) - u(t_i))$$

(valem (6.1)). Saame

$$\frac{1}{h}(u(t_{i+1}) - u(t_i)) \approx f(t_i, u(t_i)).$$

Siit avaldame $u(t_{i+1})$:

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + hf(t_i, u(t_i)). \tag{9.2}$$

Saame järgmise seose otsitava lahendi ligikaudsete väärtuste jaoks:

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i). \tag{9.3}$$

Tegemist on ühesammulise meetodiga, mida tuntakse *Euleri meetodi* nime all.

Euleri meetod on 1. järku täpsusega. Absoluutse vea hinnang punktis t_i on järgmine:

$$|u_i - u(t_i)| \le Ch,$$

kus C on konstant.

9.2. Trapetsvalemi meetod. Prognoosi-korrektsiooniskeem. 2. järku Runge-Kutta meetod

Integreerime diferentsiaalvõrrandit

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

lõigul $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt.$$

Newton-Leibnitzi valemi põhjal kehtib $\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t)dt = u(t_{i+1}) - u(t_i)$. Järelikult

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt. \tag{9.4}$$

Kasutame selles võrrandis sisalduva integraali jaoks trapetsvalemit (7.10) kahe sõlmega t_i ja t_{i+1} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt \approx \frac{h}{2}\Big[f(t_i, u(t_i)) + f(t_{i+1}, u(t_{i+1}))\Big]. \tag{9.5}$$

Asendades integraali $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt$ valemi (9.5) põhjal avaldisse (9.4), saame järgmise võrduse:

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + \frac{h}{2}f(t_i, u(t_i)) + \frac{h}{2}f(t_{i+1}, u(t_{i+1})). \tag{9.6}$$

Seega tekib järgmine valem lahendi ligikaudsete väärtuste jaoks:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f(t_{i+1}, u_{i+1}). \tag{9.7}$$

See on nn *trapetsvalemi meetod*.

Trapetsvalemi meetod on 2. järku täpsusega, st aboluutse vea hinnang punktis t_i on järgmine:

$$|u_i - u(t_i)| \le Ch^2.$$

Tegemist on ühesammulise meetodiga, mis on ilmutamata. Suurus u_{i+1} esineb lisaks vasakule poolele ka paremal pool funktsiooni f all. Seega tuleb u_{i+1} leidmiseks lahendada võrrand. Võrrandi lahendamine igal meetodi sammul muudab selle meetodi töömahukaks.

Trapetsvalemi meetodi saab muuta ilmutatuks kasutades nn *prognoosi-korrektsiooniskeemi*. Selle põhimõte on järgmine. Esmalt arvutame Euleri meetodit kasutades suuruse u_{i+1} jaoks esialgse lähendi (*prognoosi*)

$$\bar{u}_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i). \tag{9.8}$$

Seejärel asendame $\bar{u}_{i+1}$ võrrandi (9.7) paremasse poolde funktsiooni f alla:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(t_i, u_i) + \frac{h}{2} f(t_{i+1}, \bar{u}_{i+1}). \tag{9.9}$$

Valemist (9.9) arvutame u_{i+1} täpsustatud väärtuse (*korrektsiooni*). Seega koosneb prognoosi-korrektsiooniskeemi iga samm kahest alamsammust. Meetod on teist järku täpsusega nii nagu trapetsvalemi meetodki.

Prognoosi-korrektsioonimeetodi kaks alamsammu saab väga lihtsalt kokku võtta üheks sammuks. Selleks asendame $\bar{u}_{i+1}$ (9.8) põhjal valemisse (9.9). Saame järgmise ühesammulise meetodi:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(t_i, u_i) + \frac{h}{2} f\Big(t_{i+1}, u_i + hf(t_i, u_i)\Big). \tag{9.10}$$

Tegemist on teist järku *Runge-Kutta meetodiga*.

Runge-Kutta meetodeid on palju ja nad on praktikas väga populaarsed. Olgu siinkohal veel näiteks toodud üks väga sageli kasutatav 4. järku täpsusega Runge-Kutta meetod:

$$\begin{aligned}
&u_{i+1} = u_i + \tfrac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4], \quad \text{kus} \\
&F_1 = hf(t_i, u_i), \\
&F_2 = hf\left(t_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{1}{2}F_1\right), \\
&F_3 = hf\left(t_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{1}{2}F_2\right), \\
&F_4 = hf(t_i + h, u_i + F_3).
\end{aligned}$$

9.3. Adamsi meetodid

Üks võimalus mitmesammuliste meetodite tuletamiseks on asendada funktsioon f tema interpolatsioonipolünoomiga ja seejärel integreerida saadud võrrandit. Sellisel viisil saadud meetodeid nimetatakse Adamsi meetoditeks. Vaatleme siinkohal konkreetselt Adams-Bashforthi meetodit.

Tuletame meelde, et võrrandi $u'(t) = f(t, u(t))$ integreerimisel rajades t_i kuni t_{i+1} saime järgmise valemi (vt (9.4)):

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt. \tag{9.11}$$

Olgu k positiivne täisarv. Konstrueerime ülimalt k-astme polünoomi Φ_k, mis interpoleerib funktsiooni $f(t, u(t))$ sõlmedes $t_{i-k}, \ldots, t_i$, st rahuldab tingimusi

$$\Phi_k(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, u(t_{i-j}))\,, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Kuna interpolatsioonipolünoom lähendab funktsiooni f, siis

$$f(t, u(t)) \approx \Phi_k(t)\,.$$

Järelikult

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t)dt\,. \tag{9.12}$$

Asendades (9.12) valemisse (9.11) saame

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t)dt.$$

Lahendi lähisväärtuste jaoks tuleneb siit järgmine valem:

$$u_{i+1} = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t)dt. \tag{9.13}$$

Tegemist on $k + 1$. järku *Adams-Bashforthi meetodiga*.

On võimalik näidata, et selle meetodi algoritmi saab teisendada järgmisele kujule:

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(t_{i-j}, u_{i-j})\,, \tag{9.14}$$

kus $\gamma_{k,j}$ on teatavad kordajad.

$\gamma_{k,j}$ arvulisi väärtusi võib leida arvutusmeetodite käsiraamatutest. Näiteks olgu siinkohal toodud $\gamma_{k,j}$ väärtused kuni $k = 3$-ni:

k	$\gamma_{k,0} \cdots \gamma_{k,k}$			
0	h			
1	$\frac{3}{2}h$	$-\frac{1}{2}h$		
2	$\frac{23}{12}h$	$-\frac{16}{12}h$	$\frac{5}{12}h$	
3	$\frac{55}{24}h$	$-\frac{59}{24}h$	$\frac{37}{24}h$	$-\frac{9}{24}h$

Seega 1. järku Adams-Bashforthi meetod on järgmine (langeb kokku Euleri meetodiga):

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i),$$

teist järku Adams-Bashforthi meetod on järgmine:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{3h}{2} f(t_i, u_i) - \frac{h}{2} f(t_{i-1}, u_{i-1})$$

jne.

Meetod on $k+1$-sammuline. Tõepoolest, nagu algoritmist (9.14) nähtub, on suuruse u_{i+1} arvutamiseks vaja suurusi u_i, u_{i-1}, $\ldots$, u_{i-k}.

Nagu eespool öeldud, on meetod $k+1$. järku. Seega avaldub absoluutse vea hinnang punktis t_i järgmiselt:

$$|u_i - u(t_i)| \leq Ch^{k+1}.$$