VI peatükk
DETERMINANDID

§ 1. Substitutsioonid

Determinandi defineerimisel kasutatakse substitutsiooni mõistet.

Def. 1. ***n*-ndat järku substitutsiooniks** nimetatakse n esimese naturaalarvu 1, 2, ... , n iga ümberjärjestust $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Näide 1. Kolmandat järku substitutsioone on 6:

1, 2, 3;   1, 3, 2;   2, 1, 3;   2, 3, 1;   3, 1, 2;   3, 2, 1.

Võib veenduda (meie seda siin ei tee), et n-ndat järku substitutsioone on

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

tükki. Kõigi n-ndat järku substitutsioonide hulka tähistatakse S_n.

Def. 2. Olgu substitutsioonist $i_1, i_2, \dots, i_n$ valitud kaks arvu i_k ja i_l selles järjekorras, nagu nad seal seisavad, s.t. $k < l$ ehk $i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_n$. Kui $i_k > i_l$, siis öeldakse, et paar i_k, i_l moodustab **inversiooni** vaadeldavas substitutsioonis.

Näide 2. Neljandat järku substitutsioonis 4, 1, 3, 2 saab vaadelda paare

4, 1;   4, 3;   4, 2;   1, 3;   1, 2;   3, 2.

Nendest moodustavad inversiooni ainult paarid

4, 1;   4, 3;   4, 2;   3, 2.

Tähistagu

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

kõigi inversioonide arvu substitutsioonis $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Näide 3. $\sigma(4, 1, 3, 2) = 4$.

Determinantide teooria käsitlusel on vajalikud mõned substitutsioonide omadused, mis on seotud inversioonide arvuga.

Seostame iga substitutsiooniga $i_1, i_2, \dots, i_n$ maatriksi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Vahetades maatriksi M veerge nii, et selle teise rea arvud oleksid kasvavas järjekorras, saadakse maatriks

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

mille esimeseks reaks on omakorda substitutsioon $j_1, j_2, \dots, j_n$. Kui paar i_k, i_l $(k < l)$ moodustab inversiooni substitutsioonis $i_1, i_2, \dots, i_n$, siis $i_k > i_l$ ja seetõttu paar l, k moodustab inversiooni substitutsioonis $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Nii tekib üksühene vastavus substitutsioonide $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ja $j_1, j_2, \ldots, j_n$ inversioone moodustavate paaride vahel. Seega kehtib

Lemma 1. Kui $i_1, i_2, \ldots, i_n$ on *n*-ndat järku substitutsioon ja substitutsioon $j_1, j_2, \ldots, j_n$ on saadud substitutsioonist $i_1, i_2, \ldots, i_n$ äsja kirjeldatud viisil, siis

$$\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

Näide 4. Vaatleme näites 2 esinevat neljandat järku substitutsiooni 4, 1, 3, 2. Siin

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ja esialgse substitutsiooniga 4, 1, 3, 2 seostatakse substitutsioon 2, 4, 3, 1. Maatriksi *M* veergude järjekorda muutes tekitab substitutsiooni 4, 1, 3, 2 inversiooni moodustav paar 4, 3 inversiooni moodustava paari 3, 1 substitutsioonis 2, 4, 3, 1 ehk sümboolselt

$$4, 3 \;\to\; 3, 1.$$

Nii tekitatakse substitutsiooni 2, 4, 3, 1 iga inversiooni moodustav paar substitutsiooni 4, 1, 3, 2 mingi inversiooni moodustava paari poolt:

$$4, 1 \;\to\; 2, 1$$
$$3, 2 \;\to\; 4, 3$$
$$4, 2 \;\to\; 4, 1$$
$$4, 3 \;\to\; 3, 1$$

ja

$$\sigma(4, 1, 3, 2) = \sigma(2, 4, 3, 1).$$

Lemma 2. Iga substitutsiooni $i_1, i_2, \ldots, i_n$ korral

$$(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = \prod_{k, l=1;\; k<l}^{n} \frac{l-k}{i_l - i_k} \tag{1}$$

ehk

$$(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = \prod_{\{k, l\} \in P_n} \frac{k-l}{i_k - i_l}, \tag{2}$$

kus P_n on hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõigi kaheelemendiliste hulkade hulk.

Tõestus. Vaatleme korrutist

$$\prod_{k, l=1;\; k<l}^{n} \frac{l-k}{i_l - i_k}. \tag{3}$$

Selles korrutises esinevad lugejas teguritena kõikvõimalikud vahed $t-s$, kus $s<t$ ja $s, t = 1, 2, \ldots, n$. Korrutise (3) nimetajas esinevad iga $s<t$ ja $s, t = 1, 2, \ldots, n$ jaoks aga tegurid kujul $\pm(t-s)$. Siin märk “$-$“ tekib vaid juhul, kui paar t, s moodustab inversiooni substitutsioonis $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Seega tekib korrutisest (3) pärast taandamisi korrutis, kus teguritena esinevad arvud 1 ja –1 teatav arv kordi. Seejuures ülalöeldu põhjal on arvu –1 tegurina esinemiste arv võrdne inversioonide arvuga substitutsioonis $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Siit järeldubki võrdus (1). Kuna

$$\frac{l-k}{i_l-i_k}=\frac{k-l}{i_k-i_l},$$

siis võrdus (2) järeldub vahetult võrdusest (1).

Näide 5. Näidetes 2 ja 4 vaadeldud substitutsiooni 4, 1, 3, 2 korral

$$\begin{aligned}(-1)^{\sigma(4,1,3,2)} &= \frac{2-1}{1-4}\cdot\frac{3-1}{3-4}\cdot\frac{4-1}{2-4}\cdot\frac{3-2}{3-1}\cdot\frac{4-2}{2-1}\cdot\frac{4-3}{2-3}= \\ &= \frac{2-1}{2-1}\cdot\frac{3-1}{3-1}\cdot\frac{4-1}{1-4}\cdot\frac{3-2}{2-3}\cdot\frac{4-2}{2-4}\cdot\frac{4-3}{3-4}= \\ &= 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1.\end{aligned}$$

Esitame tõestuseta järgmise lemma.

Lemma 3. Kui substitutsioon $j_1, j_2, \ldots, j_n$ on saadud substitutsioonist $i_1, i_2, \ldots, i_n$ kahe arvu (näiteks i_k ja i_l, $k<l$) asukoha vahetamisel, siis

$$(-1)^{\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)} = -(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_n)}. \tag{4}$$

§ 2. Determinandi definitsioon

Olgu antud n-järku ruutmaatriks

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Def. 1. Maatriksi A **determinandiks** nimetatakse summat

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n} (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \tag{1}$$

kus iga n-järku substitutsiooni $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jaoks on üks liidetav

$$(-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}. \tag{2}$$

Summas (1) on $n!$ liidetavat. Liidetavas (2) arvu -1 aste on korrutise $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ märgi määramiseks. Summat (1) tähistatakse veel

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ja seda nimetatakse ka ***n*-ndat järku determinandiks**. Seega

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n} (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Arve a_{ij} nimetatakse **determinandi elementideks**. Summa (1) arvutamist nimetatakse determinandi **väärtuse leidmiseks**.

Näide 1. (**teist järku determinant**) Teist järku substitutsioonid on 1, 2 ja 2, 1 ning

$$\sigma(1, 2) = 0 \text{ ja } \sigma(2, 1) = 1.$$

Teist järku determinandi väärtuse arvutamiseks saadakse eeskiri

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2) \in S_2} (-1)^{\sigma(i_1, i_2)} a_{1i_1} a_{2i_2} =$$

$$= (-1)^{\sigma(1, 2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\sigma(2, 1)} a_{12} a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

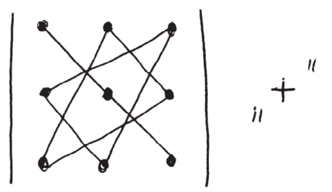
Näide 2. (**kolmandat järku determinant**) Näites 1 (§ 1) loetleti kõik kolmandat järku substitutsioonid. Inversioonide arvud nendes substitutsioonides on

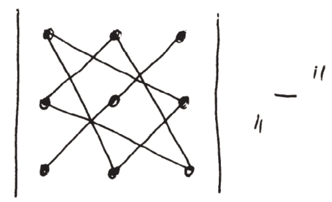
$$\sigma(1,2,3)=0,\ \sigma(1,3,2)=1,\ \sigma(2,1,3)=1,$$
$$\sigma(2,3,1)=2,\ \sigma(3,1,2)=2,\ \sigma(3,2,1)=3.$$

Seetõttu saadakse kolmandat järku determinandi arvutamiseka eeskiri

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} (-1)^{\sigma(i_1,i_2,i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} = \\
&= (-1)^{\sigma(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\sigma(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\sigma(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} + \\
&+ (-1)^{\sigma(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\sigma(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\sigma(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} = \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Skeemi kolmandat järku determinandi arvutamiseks nimetatakse **Sarrus`i reegliks**:





Neljandat, viiendat jne. järku determinantide väärtuse leidmiseks kasutatakse juba determinantide omadusi.