X peatükk
EUKLEIDILINE RUUM

§ 1. Skalaarkorrutis

Afiinses ruumis pole võimalik arvutada nn. meetrilisi suurusi: vektori pikkust, punktide vahelist kaugust, vektorite vahelist nurka jne. Meetriliste suuruste sissetoomiseks kasutatakse skalaarkorrutise mõistet, mille üldine definitsioon on järgmine.

Def. 1. **Skalaarkorrutiseks** vektorruumis *V* nimetatakse reeglit, mis igale kahele vektorile paneb vastavusse parajasti ühe reaalarvu, mida tähistatakse $\alpha \cdot \beta$ ja nimetatakse **vektorite α ja β skalaarkorrutiseks**, kusjuures on täidetud järgmised tingimused:

1° $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ iga $\alpha \in V$ korral;
2° $\alpha \cdot \alpha = 0$ parajasti siis, kui $\alpha = \theta$ (nullvektor)
3° $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ iga $\alpha, \beta \in V$ korral (kommutatiivsus);
4° $c(\alpha \cdot \beta) = (c\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (c\beta)$ iga $c \in \mathbb{R}$ ja $\alpha, \beta \in V$ korral (homogeensus);
5° $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$ iga $\alpha, \beta, \gamma \in V$ korral (distributiivsus).

Näide 1. Aritmeetilises vektorruumis $V = \mathbb{R}^n$ vaadeldakse tavaliselt II peatükis § 2 määratud skalaarkorrutist:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (a_1; a_2; \dots; a_n) \cdot (b_1; b_2; \dots; b_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Selliselt defineeritud korrutise jaoks on täidetud definitsioonis 1 esitatud nõuded $1° - 5°$.

Näide 2. Igas lõplikumõõtmelises vektorruumis on võimalik defineerida skalaarkorrutis. Selleks tuleb fikseerida ruumis mingi baas $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ ja defineerida vektorite

$$\alpha = (a_1; a_2; \dots; a_n)_B \quad \text{ja} \quad \beta = (b_1; b_2; \dots; b_n)_B$$

skalaarkorrutis analoogselt reegliga (1):

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \,.$$

Kui *V* ei ole nullruum, siis on vektorruumis *V* lõpmata palju baase ja seega ka erinevaid skalaarkorrutisi.

Def. 2. Vektorruumi *V* koos temas fikseeritud skalaarkorrutisega nimetatakse **eukleidiliseks vektorruumiks**.

Eukleidilises vektorruumis võrdub nulliga iga vektori α skalaarkorrutis nullvektoriga θ:

$$\alpha \cdot \theta = \theta \cdot \alpha = 0 \,. \tag{2}$$

§ 2. Eukleidilises vektorruumis defineeritavad mõisted

Järgnevalt olgu V mis tahes eukleidiline vektorruum. Defineerime skalaarkorrutise abil vektori pikkuse ja vektoritevahelise nurga.

Def. 1. Vektori $\alpha \in V$ **pikkuseks** nimetatakse arvu $\sqrt{\alpha \cdot \alpha}$. Vektori α pikkust tähistatakse $\|\alpha\|$.

Seega

$$\boxed{\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}} \quad \text{ehk} \quad \boxed{\alpha \cdot \alpha = \|\alpha\|^2}.$$

Skalaarkorrutise aksioomi $1°$ põhjal on igal vektoril pikkus ja see on üheselt määratud. Aksioomist $2°$ järeldub, et $\|\alpha\| = 0$ parajasti siis, kui α on nullvektor.

Teoreem. Mis tahes arvu c ja kahe vektori α ja β korral eukleidilisest vektorruumist V kehtivad järgmised omadused:

$$\|c\alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|, \tag{1}$$

$$|\alpha \cdot \beta| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|, \tag{2}$$

$$\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|. \tag{3}$$

Tõestus. Kuna $\sqrt{c^2} = |c|$, siis

$$\|c\alpha\| = \sqrt{(c\alpha) \cdot (c\alpha)} = \sqrt{c^2 (\alpha \cdot \alpha)} = |c| \cdot \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = |c| \cdot \|\alpha\|$$

ja võrdus (1) kehtib.

Tõestame nüüd võrratuse (2). Kui $\alpha = \theta$ või $\beta = \theta$, siis võrratus (2) kehtib. Seepärast eeldame, et $\alpha \ne \theta$ ja $\beta \ne \theta$. Valime suvalise reaalarvu x ja moodustame vektori $\xi = \alpha + x\beta$. Aksioomi $1°$ põhjal $\xi \cdot \xi \ge 0$, s.t.

$$(\alpha + x\beta) \cdot (\alpha + x\beta) \ge 0. \tag{4}$$

Avame skalaarkorrutise aksioome kasutades sulud:

$$\alpha \cdot (\alpha + x\beta) + (x\beta) \cdot (\alpha + x\beta) \ge 0,$$

$$\alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot (x\beta) + (x\beta) \cdot \alpha + (x\beta) \cdot (x\beta) \ge 0,$$

$$\alpha \cdot \alpha + x(\alpha \cdot \beta) + x(\beta \cdot \alpha) + x^2 (\beta \cdot \beta) \ge 0,$$

$$\|\alpha\|^2 + x(\alpha \cdot \beta) + x(\alpha \cdot \beta) + x^2 \|\beta\|^2 \ge 0,$$

$$\|\beta\|^2 x^2 + 2(\alpha \cdot \beta) x + \|\alpha\|^2 \ge 0. \tag{5}$$

Kuna $\beta \ne \theta$, siis on võrratus (5) ruutvõrratus. Võrratus (5) kehtib iga reaalarvu x korral, mistõttu peab tema vasakul pool esineva ruutkolmliikme diskriminant D rahuldama võrratust $D \le 0$:

$$D = \left(2(\alpha \cdot \beta)\right)^2 - 4 \cdot \|\beta\|^2 \cdot \|\alpha\|^2 \le 0. \tag{6}$$

Teisendame seda võrratust:

$$4(\alpha \cdot \beta)^2 \le 4 \cdot \|\beta\|^2 \cdot \|\alpha\|^2, \quad (\alpha \cdot \beta)^2 \le \|\beta\|^2 \cdot \|\alpha\|^2,$$

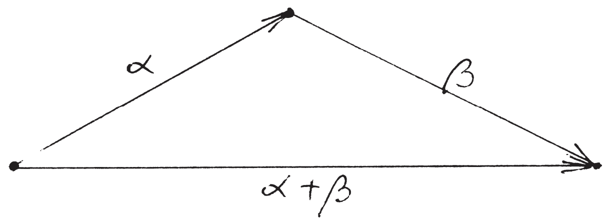
kust järeldubki võrratus (2).

Võrratuse (3) näitamiseks arvutame

$$
\begin{aligned}
\|\alpha+\beta\|^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha\cdot(\alpha+\beta)+\beta\cdot(\alpha+\beta) = \\
&= \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta = \\
&= \|\alpha\|^2 + 2(\alpha\cdot\beta) + \|\beta\|^2 \le \\
&\le \|\alpha\|^2 + 2|\alpha\cdot\beta| + \|\beta\|^2 \le \\
&\le \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\cdot\|\beta\| + \|\beta\|^2 = \\
&= (\|\alpha\|+\|\beta\|)^2
\end{aligned}
$$

(kasutati võrratust (2)). Siit saabki pärast juurimist võrratuse (3).

Võrratust (2) nimetatakse **Cauchy-Bunjakovski võrratuseks**, võrratust (3) aga **kolmnurga võrratuseks**. See viimane nimetus tuleneb võrratuse (3) tõlgendusest geomeetriliste vektorite hulgal. Kolmnurga ühegi külje pikkus ei ületa ülejäänud kahe külje pikkuste summat.



Def. 2. Olgu α ja β nullvektorist erinevad vektorid eukleidilisest vektorruumist *V*. **Vektorite α ja β vaheliseks nurgaks** nimetatakse nurka $\widehat{\alpha,\beta}$. mis on määratud võrdusega

$$\boxed{\cos\widehat{\alpha,\beta} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}}. \tag{7}$$

Kui $\alpha \ne \theta$ ja $\beta \ne \theta$, siis võrduse (7) paremal pool esineva murru väärtust saab leida ning Cauchy-Bunjakovski võrratuse põhjal ei ületa selle absoluutväärtus arvu 1.Seega saab vaadeldav murd olla mingi nurga koosinuseks. Koosinusfunktsiooni omaduste tõttu pole nurk $\widehat{\alpha,\beta}$ üheselt määratud. Võib nõuda, et $0 \le \widehat{\alpha,\beta} \le \pi$. Siis on nurk üheselt määratud.

Vektorid on risti, kui nendevaheline nurk on $\frac{\pi}{2}$. Kuna $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, siis peab sel korral skalaarkorrutis $\alpha\cdot\beta$ võrduma nulliga.

Def. 2. Öeldakse, et vektorid α ja β on omavahel **risti** ehk **ortogonaalsed** ja tähistatakse $\alpha \perp \beta$, kui $\alpha\cdot\beta = 0$.

§ 3. Ortogonaalsed vektorite süsteemid

Def. 1. **Ortogonaalseks vektorite süsteemiks** eukleidilises vektorruumis *V* nimetatakse vektoreid $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, mis on omavahel risti, s.t. $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$ iga $i \neq j$ korral, kus $i,\ j = 1, 2, \dots, m$.

Esitame tõestuseta järgmise teoreemi.

Teoreem 1. Ortogonaalsete nullvektorist erinevate vektorite süsteemi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Def. 2. Öeldakse, et vektor α on **normeeritud** ehk **ühikvektor**, kui tema pikkus $\|\alpha\|$ võrdub arvuga 1.

Igalt vektorilt α, kus $\alpha \neq \theta$, saab üle minna normeeritud vektorile, korrutades seda arvuga $\frac{1}{\|\alpha\|}$:

$$\left\| \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1.$$

Üleminekut vektorilt α vektorile $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ nimetatakse vektori α **normeerimiseks**.

Def. 3. Kui ortogonaalses vektorite süsteemis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ kõik vektorid on normeeritud, siis öeldakse, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ on **ortonormeeritud vektorite süsteem**. Eukleidilise vektorruumi baasi nimetatakse **ortonormeeritud** ehk **ortonormaalseks baasiks**, kui baasivektorid moodustavad ortonormeeritud vektorite süsteemi.

Kui vektorid on antud oma koordinaatidega mingil ortonormaalsel baasil, siis nende vektorite skalaarkorrutis avaldub analoogselt hariliku skalaarkorrutisega eukleidilises vektorruumis $\mathbb{R}^n$ (vt. § 1 näidet1). Edaspidi, rääkides *n*-mõõtmelisest eukleidilisest vektorruumist ja vaadeldes tema vektoreid, eeldatakse alati, et vektorid on antud oma koordinaatidega mingil ortonormeeritud baasil **B** ja jäetakse indeks **B** vektori koordinaatide juurest ära. Teiste sõnadega, iga *n*-mõõtmeline eukleidiline vektorruum *V* samastatakse eukleidilise vektorruumiga $\mathbb{R}^n$, kus skalaarkorrutist arvutatakse nii, nagu seda tehti § 1 näides 1.

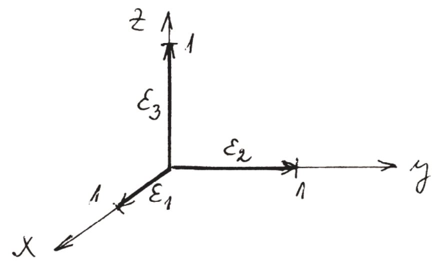
§ 4. Eukleidiline ruum

Afiinses ruumis **A** = (*V*; **P**) vaadeldi vektorite korral ainult lineaarseid tehteid. Juhul kui *V* on eukleidiline vektorruum, vaadeldakse lisaks veel skalaarkorrutist, mis võimaldab arvutada vektorite pikkusi ja vektorite vahelisi nurki. Sellist afiinset ruumi nimetataksegi eukleidiliseks ruumiks.

Def. 1. Afiinst ruumi **A** = (*V*; **P**), milles *V* on eukleidiline vektorruum, nimetatakse **eukleidiliseks ruumiks**. Eukleidilise ruumi **A** = (*V*; **P**) **mõõtmeks** nimetatakse vektorruumi *V* mõõdet.

Def. 2. Eukleidilise ruumi reeperit **T =** {*O*; **B**}, milles **B** = $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ on vektorruumi *V* ortonormaalne baas, nimetatakse **ortonormaalseks reeperiks** ehk **teljestikuks**.

Kui ei ole öeldud vastupidist, on edaspidi eeldatud, et kõigi vaadeldavate vektorite ja punktide koordinaadid on antud mingis ortonormaalses reeperis. Kahemõõtmelist eukleidilist ruumi võib siis alati tõlgendada kui punktide ja vektorite hulka tasandil, kus reeperiks on tavaline *xy*-teljestik (baasivektoriteks on telgede suunalised ühikvektorid). Kolmemõõtmelist eukleidilist ruumi võib aga tõlgendada kui punktide ja vektorite hulka tavalises kolmemõõtmelises ruumis tema harjumuspärase *xyz*-teljestikuga.



Def. 3. **Punktide** *A* ja *B* **vaheliseks kauguseks** nimetatakse vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkust ja seda tähistatakse $\rho(A, B)$.

Seega

$$\rho(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}\,. \tag{1}$$

Esitame tõestuseta järgmise teoreemi.

Teoreem (**kauguse omadused**). Kui *A*, *B* ja *C* on punktid eukleidilisest ruumist, siis:

1° $\rho(A, B) \geq 0$,

2° $\rho(A, B) = 0$ parajasti siis, kui $A = B$,

3° $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ (sümmeetria),

4° $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ (kolmnurga omadus).

Kui on antud punktid

$$A(a_1; a_2; \dots; a_n) \quad \text{ja} \quad B(b_1; b_2; \dots; b_n)$$

oma koordinaatidega mingis ortonormaalses teljestikus, siis

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \dots; b_n - a_n)$$

ja

$$\boxed{\rho(A, B) = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}}\,. \tag{2}$$

Saadud võrdust (2) kasutatakse punktide vahelise kauguse arvutamiseks.