I peatükk
KOMPLEKSARVUD

§ 1. Kompleksarvud. Lähtedefinitsioonid

Kompleksarvuks *z* nimetatakse avaldist

$$z = a + bi, \tag{1}$$

kus *a* ja *b* on reaalarvud ja *i* on niinimetatud **imaginaarühik**, mis on määratud võrdustega

$$\boxed{i = \sqrt{-1}} \quad \text{või} \quad \boxed{i^2 = -1}; \tag{2}$$

arvu *a* nimetatakse kompleksarvu **reaalosaks** ja teist liidetavat bi aga tema **imaginaarosaks**. Tähistatakse

$$a = \operatorname{Re} z, \quad bi = \operatorname{Im} z.$$

Kui $a = 0$, siis arvu $0 + bi = bi$ nimetatakse **puhtimaginaararvuks**; kui $b = 0$, siis saadakse reaalarv: $a + 0 \cdot i = a$.

Kaht kompleksarvu $z = a + bi$ ja $\overline{z} = a - bi$, mis erinevad ainult imaginaarosa märgi poolest, nimetatakse **kaaskompleksarvudeks**.

Kokkuleppe põhjal

1) kaht kompleksarvu $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ loetakse võrdseteks $(z_1 = z_2)$, kui

$$a_1 = a_2 \text{ ja } b_1 = b_2,$$

s.t. kui nende reaalosad on võrdsed ja imaginaarosad on võrdsed;

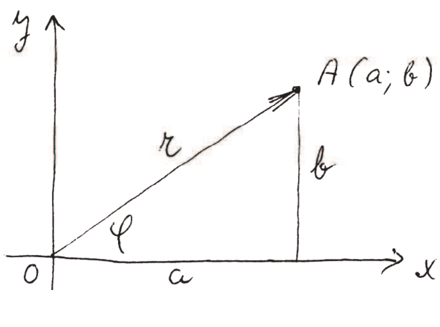
2) kompleksarv võrdub nulliga, s.o.

$$z = a + bi = 0$$

siis ja ainult siis, kui $a = 0$ ja $b = 0$.

1. <u>*Kompleksarvude geomeetriline kujutamine.*</u>

Iga kompleksarvu $z = a + bi$ saab *xy*-tasandil kujutada punktina $A(a; b)$, mille koordinaadid on *a* ja *b*, ja vastupidi, *xy*-tasandi iga punkti $M(x; y)$ saab vaadelda kompleksarvu $z = x + iy$ geomeetrilise kujutisena.



Tasandit, millel kujutatakse kompleksarve, nimetatakse **kompleksmuutuja *z* tasandiks** (joonisel on sümbol *z* ringi sees). Selle tasandi nendele punktidele, mis asetsevad *x*-teljel, vastavad reaalarvud ($b = 0$). Punktid, mis asetsevad *y*-teljel, kujutavad puhtimaginaararve; sel juhul $a = 0$. Seepärast nimetatakse *x*-telge **reaalteljeks** ja y-telge **imaginaarteljeks**.

Ühendades punkti $A(a; b)$ koordinaatide alguspunktiga, saame vektori $\overrightarrow{OA}$. Vahel on sobiv kompleksarvu $z = a + bi$ geomeetriliseks kujutiseks lugeda vektorit $\overrightarrow{OA}$.

2. *Kompleksarvu trigonomeetriline kuju.*

Tähistame punkti $A(a;b)$ polaarkoordinaadid tähtedega φ ja r $(r \ge 0)$, lugedes pooluseks koordinaatide alguspunkti ja polaarteljeks *x*-telje positiivse suuna. Siis kehtivad seosed:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi .$$

Järelikult saab kompleksarvu *z* esitada kujul

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

ehk

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} . \tag{3}$$

Avaldist võrduse paremal poolel nimetatakse kompleksarvu $z = a + bi$ **trigonomeetriliseks kujuks**; suurust *r* nimetatakse kompleksarvu *z* **mooduliks** ja suurust φ selle kompleksarvu **argumendiks**; neid tähistatakse järgmiselt:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z . \tag{4}$$

Kompleksarvu $z \ne 0$ argument φ on üheselt määratud kuni arvu 2π täisarvu kordse täpsuseni. Seepärast lepitakse sageli kokku valida φ mingil kindlal arvtelje poollõigul pikkusega 2π näiteks $0 \le \varphi < 2\pi$.

Suurused *r* ja φ avalduvad *a* ja *b* kaudu valemitega:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}} , \tag{5}$$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a}, & kui\ a > 0, b \ge 0; \\ \pi + \arctan\dfrac{b}{a}, & kui\ a < 0; \\ 2\pi + \arctan\dfrac{b}{a}, & kui\ a > 0, b < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & kui\ b > 0, a = 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & kui\ b < 0, a = 0. \end{cases}} \tag{6}$$

Reaalarvu *A* saab ka kirjutada trigonomeetrilisel kujul (3):

$$A = |A|(\cos 0 + i\sin 0), \text{ kui } A > 0$$

ja

$$A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi), \text{ kui } A < 0 .$$

Kompleksarvu 0 moodul võrdub nulliga: $|0| = 0$. Nulli argumendiks võib aga võtta mistahes nurga φ, sest võrdus

$$0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

kehtib iga nurga φ puhul.

§ 2. Põhitehted kompleksarvudega

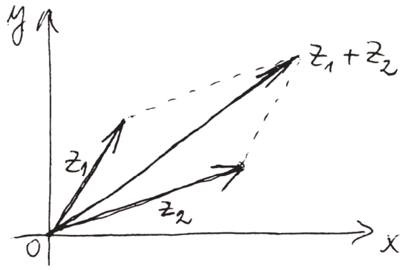
1. *Komplesarvude liitmine.*

Kahe kompleksarvu $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ **summaks** nimetatakse võrdusega

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \tag{1}$$

määratud kompleksarvu.

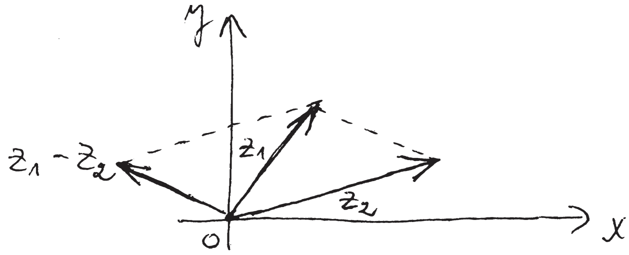
Vektoritena kujutatud kompleksarve liidetakse vektorite liitmise reegli põhjal.



2. *Kompleksarvude lahutamine.*

Kahe kompleksarvu $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ **vaheks** nimetatakse niisugust kompleksarvu, mille liitmisel arvuga z_2 saadakse summa, mis võrdub arvuga z_1:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i\ . \tag{2}$$



Kahe kompleksarvu vahe moodul võrdub neid arve komplekstasandil kujutavate punktide vahelise kaugusega:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}\ .$$

3. *Kompleksarvude korrutamine.*

Kompleksarvude $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ **korrutiseks** nimetatakse kompleksarvu, mis saadakse, kui need arvud korrutada algebraliste kaksliikmetena, arvestades seejuures, et

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = (-i)\cdot i = -i^2 = 1; \quad i^5 = i \text{ jne.},$$

üldiselt suvalise täisarvulise *k* korral

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i\ .$$

Selle reegli põhjal saame:

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2$$

ehk

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i\ . \tag{3}$$

Kui kompleksarvud on kirjutatud trigonomeetrilisel kujul:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

siis

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] = \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]. \end{aligned}$$

Seega,

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]}, \qquad (3')$$

s.t. *kahe kompleksarvu korrutis on niisugune kompleksarv, mille moodul võrdub tegurite moodulite korrutisega ja argument võrdub tegurite argumentide summaga*.

Vastavalt võrdusele (3) võib kaaskomleksarvude $z = a + bi$ ja $\overline{z} = a - bi$ korrutise esitada kujul:

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

ehk

$$z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2.$$

Kaaskompleksarvude korrutis võrdub neist kummagi mooduli ruuduga.

4. <u>*Kompleksarvude jagamine.*</u>

Kompleksarvude **jagamine** defineeritakse korrutamise pöördtehtena.

Olgu $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ja $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$. Siis $\frac{z_1}{z_2} = z$ on niisugune kompleksarv, et $z_1 = z_2 z$. Kui

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + iy,$$

siis

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + iy)$$

ehk

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x)i;$$

x ja y määratakse võrrandisüsteemist

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = a_2 y + b_2 x.$$

Lahendanud süsteemi, saame:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Lõpptulemus on järgmine:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \qquad (4)$$

Praktikas jagatakse kompleksarve järgmiselt: et jagada arvu $z_1 = a_1 + b_1 i$ arvuga $z_2 = a_2 + b_2 i$, korrutame jagatavat ja jagajat jagaja kaaskompleksarvuga (s.t. arvuga $a_2 - b_2 i$). Siis on jagajaks reaalarv; jagades sellega jagatava reaalosa ja imaginaarosa, saame jagatise:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Kui kompleksarvud on antud trigonomeetrilisel kujul:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

siis

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

ehk

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]}. \qquad (5)$$

Seda võrdust saab kontrollida, kui korrutada jagaja jagatisega, kasutades valemit (3´).

Seega, *kahe kompleksarvu jagatise moodul võrdub jagatava ja jagaja moodulite jagatisega; jagatise argument võrdub jagatava ja jagaja argumentide vahega*.

Tehete reeglitest järeldub, et kompleksarvude liitmisel, lahutamisel, korrutamisel ja jagamisel saadakse ka tulemuseks kompleksarv.

§ 3. Kompleksarvu astendamine ja juurimine

1. *Astendamine.*

Eelmise paragrahvi valemist (3´) järeldub, et positiivse täisarvu n korral

$$\boxed{\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}. \qquad (1)$$

Valemist nähtub, et *kompleksarvu astendamisel positiivse täisarvulise astendajaga moodul astendatakse ja argument korrutatakse selle astendajaga*.

Kui valemis (1) võtta $r=1$, siis saame:

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi}.$$

Seda valemit nimetatakse **Moivre´i valemiks**.

2. *Juurimine.*

Kompleksarvu n-ndaks juureks nimetatakse niisugust kompleksarvu, mille n-s aste võrdub juuritava arvuga, s.t.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

kui

$$\rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Et võrdsete kompleksarvude moodulid peavad olema võrdsed, argumendid aga võivad erineda arvu poolest, mis on 2π kordne, siis

$$\rho^n = r\,, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi\,.$$

Siit leiame:

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\,,$$

kus *k* on mistahes täisarv ja $\sqrt[n]{r}$ on positiivse arvu *r* aritmeetiline (s.t. reaalne positiivne) juur. Järelikult,

$$\boxed{\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}\,. \qquad (2)$$

Andes *k*-le väärtused $0, 1, 2, \ldots, n-1$, saame juurele *n erinevat väärtust*. Ülejäänud *k* väärtuste puhul erinevad argumendid varemsaadud argumentidest 2π mingi kordse võrra, mistõttu vastavad juure väärtused ühtivad varemleitud väärtustega.

Niisiis **kompleksarvu *n*-ndal juurel on *n* erinevat väärtust**.

Ka nullist erineva reaalarvu *A* *n*-ndal juurel on *n* väärtust, sest reaalarv on kompleksarvu erijuhuks.