V peatükk
LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

§ 1. Lineaarne võrrandisüsteem ja tema maatrikskuju

Lineaarse võrrandi all mõistetakse võrrandit kujul

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,, \qquad (1)$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja b on fikseeritud arvud ning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on **tundmatud**. Arvu b nimetatakse vaadeldava võrrandi **vabaliikmeks**, arve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aga tema **kordajateks**.

Def. 1. Võrrandi (1) **lahendiks** nimetatakse selliseid tundmatute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtusi $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, et pärast nende paigutamist võrrandi (1) vasakusse poolde tundmatute asemele kehtiks võrdus

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = b\,.$$

Võrrandi (1) lahend on n arvust $c_1, c_2, \ldots, c_n$ koosnev järjestatud lõplik jada. Seega saab teda vaadelda aritmeetilise vektorina

$$(c_1; c_2; \ldots; c_n)\,,$$

kus

$$x_1 = c_1\,,\ \ x_2 = c_2\,,\ \ \ldots, x_n = c_n\,.$$

Mõnikord on sobiv paigutada arvud $c_1, c_2, \ldots, c_n$ veergu ja vaadelda lahendit kui üheveerulist maatriksit

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Lahendi (2) korral öeldakse ka, et arvud $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **rahuldavad** võrrandit (1).

Def. 2. **Lineaarseks võrrandisüsteemiks** nimetatakse lõplikust arvust lineaarseist võrrandeist koosnevat süsteemi. Tema üldkuju on

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (3)$$

Arve a_{ij} nimetatakse võrrandisüsteemi (3) **kordajateks**, arve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ aga süsteemi (3) **vabaliikmeteks**.

Def. 3. Arve $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mis rahuldavad süsteemi (3) kõiki võrrandeid, nimetatakse võrrandisüsteemi (3) **lahendiks**.

Ka süsteemi (3) lahendit vaadeldakse aritmeetilise vektorina $(c_1; c_2; ...; c_n)$, aga teda kirjutatakse ka kujul (2).

Def. 4. Lineaarse võrrandisüsteemi (3) kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse **süsteemi (3) maatriksiks**. Maatriksi *A* täiendamisel vabaliikmete veeruga tekkinud maatriksit

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse **süsteemi (3) laiendatud maatriksiks**.

Seostame süsteemiga (3) veel maatriksid

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Siis

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b.$$

Seega lineaarne võrrandisüsteem (3) on **maatrikskujul** antav võrdusega

$$Ax = b, \tag{4}$$

kus maatriksid *A*, *x* ja *b* on kirjeldatud ülal. Kuna süsteemi (4) laiendatud maatriks *B* koosneb maatriksist *A* ja vabaliikmete veerust *b*, siis tähistatakse teda ka blokk-kujul $B = (A, b)$.

Vahel kasutatakse süsteemi (3) kirjeldamiseks ka tema nn. **vektorkuju**. Vektorkuju saamiseks tähistatakse süsteemi (3) maatriksi *A* veerud

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Neid võib vaadelda kui *m*-mõõtmelisi aritmeetilisi vektoreid, kus esinevad arvud on paigutatud veergu. Siis

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 \\ a_{21}\, x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\, x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}\, x_2 \\ a_{22}\, x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}\, x_2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n}\, x_n \\ a_{2n}\, x_n \\ \vdots \\ a_{mn}\, x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$$

ehk

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = b\,. \tag{5}$$

Avaldist (5) nimetatakse süsteemi (3) esituseks **vektorkujul**.

§ 2. Gaussi meetod

Võrrandisüsteemi (4) lahendamiseks teisendatakse ta kujule, mis on samaväärne esialgse kujuga, kuid kust saaks kõige lihtsamalt süsteemi (4) kõik lahendid.

Def. 1. Kahte lineaarset võrrandisüsteemi nimetatakse **samaväärseteks** ehk **ekvivalentseteks**, kui neil on ühed ja samad lahendid.

Lineaarse võrrandisüsteemi teisendamisel samaväärsele kujule kasutatakse järgmisi teisendusi:

1° süsteemi mis tahes võrrandit korrutatakse mis tahes nullist eriva arvuga;

2° süsteemi mis tahes võrrandile liidetakse juurde mis tahes arvu kordne mingi teine võrrand samast süsteemist.

Teoreem. Võrrandisüsteemist $Ax = b$ (1)
lõpliku arvu teisendustega 1° ja 2° saadud võrrandisüsteem on samaväärne esialgse süsteemiga.

Tõestus. Tõestuseks piisab, kui vaadelda juhtu, kus süsteemile (1) on üks kord rakendatud kas teisendust 1° või teisendust 2°.

Oletame, et süsteemile rakendati teisendust 2°: süsteemi (1) *i*-ndale võrrandile liideti juurde arvu *c* kordne *j*-s võrrand $(i \neq j)$. Olgu tekkinud võrrandisüsteem maatrikskujul

$$\hat{A}x = \hat{b}. \qquad (2)$$

Veendume, et süsteemi (1) iga lahend on ka süsteemi (2) lahendiks ja vastupidi.

Süsteemi (2) laiendatud maatriks $\hat{B} = \left(\hat{A}, \hat{b}\right)$ saadakse süsteemi (1) laiendatud maatriksist $B = (A, b)$ tema *i*-ndale reale arvu *c* kordse *j*-nda rea juurdeliitmise teel. IV ptk., § 5, teoreemi 1 kohaselt

$$\hat{B} = \left(\hat{A}, \hat{b}\right) = \hat{E}B,$$

kus $\hat{E}$ on maatriks, mis on saadud *m*-ndat järku ühikmaatriksist *E* tema *i*-ndale reale arvu *c* kordse *j*-nda rea juurdeliitmisel. Kuna

$$B = (A, b) \text{ ja } \hat{E}B = \left(\hat{E}A, \hat{E}b\right),$$

siis järelikult

$$\hat{A} = \hat{E}A \text{ ja } \hat{b} = \hat{E}b.$$

Kui x^* on süsteemi (1) lahend (paigutatuna veergu), siis $Ax^* = b$ ja

$$\hat{A}x^* = \left(\hat{E}A\right)x^* = \hat{E}\left(Ax^*\right) = \hat{E}b = \hat{b},$$

s.t. x^* on ka süsteemi (2) lahend. Sellega on näidatud, et süsteemi (1) iga lahend on ka teisenduse 2° abil süsteemist (1) saadud süsteemi (2) lahendiks. Kuna aga ka süsteem (1) on saadav süsteemist (2) teisenduse 2° abil (süsteemi (2) *i*-nale reale arvu –*c* kordse *j*-nda rea juurdeliitmisel), siis analoogselt ülalöelduga, süsteemi (2) iga lahend on ka süsteemi (1) lahendiks. Järelikult on võrrandisüsteemidel (1) ja (2) ühed ja samad lahendid, s.t. nad on samaväärsed.

Analoogselt tõestatakse, et võrrandisüsteemist (1) teisendusega 1° saadud võrrandisüsteem on samaväärne esialgse süsteemiga (1).

Selle teoreemi tõestusest on näha, et teisenduste 1° ja 2° rakendamine võrrandisüsteemile (1) on samaväärne tema laiendatud maatriksile (A, b) vastavate ridade elementaarteisenduste

rakendamisega. Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks teostataksegi teisendusi nendele süsteemidele vastavate laiendatud maatriksitega.

Vaatleme, millisele kujule $\left(\hat{A}, \hat{b}\right)$ tuleb teisendada võrrandisüsteemi (1) laiendatud maatriks $\left(A, b\right)$ nii, et kujust $\left(\hat{A}, \hat{b}\right)$ oleks võimalik välja kirjutada süsteemi (1) kõik lahendid (kujule $\left(\hat{A}, \hat{b}\right)$ vastav võrrandisüsteem $\hat{A}x = \hat{b}$ on samaväärne võrrandisüsteemiga $Ax = b$). Seejuures eeldame, et *A* pole nullmaatriks (kui *A* on nullmaatriks, siis juhul, kui vähemalt üks vabaliikmetest erineb nullist, pole süsteem lahenduv; kui aga kõik vabaliikmed on nullid, siis on süsteemi lahenditeks kõik *n*-mõõtmelised aritmeetilised vektorid).

IV ptk, § 5, teoreemi 3 kohaselt on maatriks *A* ridade elementaarteisendustega teisendatav kujule (4) sellest teoreemist. Tähistame saadud maatriksit $\hat{A}$. Rakendades samu ridade teisendusi vabaliikmete veerule *b*, saadakse maatriks

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_k \\ \hat{b}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{pmatrix}.$$

Seega on võrrandisüsteemi (1) laiendatud maatriks $\left(A, b\right)$ ridade elementaarteisendustega viidav kujule

$$\left(\hat{A}, \hat{b}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & j_1 & & j_2 & & j_k & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \hat{b}_1 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \hat{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \hat{b}_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{b}_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{b}_m \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1.\,rida \\ 2.\,rida \\ \\ k.\,rida \\ \\ \\ \\ \end{array}, \qquad (3)$$

millele vastav võrrandisüsteem on $\hat{A}x = \hat{b}$
ehk

$$\begin{aligned} & x_{j_1} + \sum_{j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}} \hat{a}_{1j} x_j = \hat{b}_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_{j_k} + \sum_{j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}} \hat{a}_{kj} x_j = \hat{b}_k \\ & 0x_1 + 0x_2 + .. + 0x_n = \hat{b}_{k+1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 0x_1 + 0x_2 + .. + 0x_n = \hat{b}_m \,, \end{aligned} \qquad (4)$$

kus $\hat{A} = \left(\hat{a}_{ij}\right)$ ja arvud $j_1, \dots, j_k$ avaldises (3) maatriksi $\hat{A}$ kohal näitavad maatriksi $\hat{A}$ veerunumbreid. Summa avaldistes (4) võetakse üle kõigi indeksi *j* selliste väärtuste, mis on arvude 1 ja *n* vahel $\left(1 \le j \le n\right)$ ja ei võrdu arvudega $j_1, \dots, j_k$. Võrrandisüsteem (4) on samaväärne esialgse süsteemiga (1), s.t. neil on ühed ja samad lahendid. Siit saadaksegi esialgse võrrandisüsteemi (1) kõik lahendid:

1) kui arvude $\hat{b}_{k+1}, \dots, \hat{b}_m$ hulgas leidub nullist erinevaid arve, siis võrrandisüsteemil (1) lahendid puuduvad;
2) kui $\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_{k+2} = \dots = \hat{b}_m = 0$ ja $k = n$, siis $\left\{j_1, \dots, j_k\right\} = \left\{1, 2, \dots, n\right\}$ ning võrrandisüsteemil (1) on parajasti üks lahend
$$x_{j_1} = \hat{b}_1, \quad x_{j_2} = \hat{b}_2, \ \dots, \ x_{j_n} = \hat{b}_n .$$
3) kui $\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_{k+2} = \dots = \hat{b}_m = 0$ ja $k < n$ (juht $k > n$ on võimatu), siis süsteemil (1) on lõpmata palju lahendeid. Need lahendid saadakse järgmiselt: nende tundmatute x_j väärtused, mille korral $j \notin \left\{j_1, \dots, j_k\right\}$, võib valida võrdseks mis tahes reaalarvuga, ülejäänud tundmatute väärtused arvutatakse vastavalt võrdustele (4), s.t.
$$\begin{gathered} x_j = c_j, \text{ kui } j \notin \left\{j_1, \dots, j_k\right\}, \\ x_{j_1} = \hat{b}_1 - \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_k\}} \hat{a}_{1j} c_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_k} = \hat{b}_k - \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_k\}} \hat{a}_{kj} c_j, \end{gathered} \tag{5}$$

kus c_j on mis tahes reaalarv $\left(j \notin \left\{j_1, \dots, j_k\right\}\right)$.

Avaldisi (5) nimetatakse võrrandisüsteemi (1) **üldlahendiks**. Kuna tundmatute $x_j = c_j$, kui $j \notin \left\{j_1, \dots, j_k\right\}$, väärtusi saab valida vabalt, siis neid nimetatakse **vabadeks tundmatuteks**. Kui c_j väärtused on juba valitud, siis saadakse üldlahendist (5) konkreetne lahend, mida nimetatakse **erilahendiks**.

Kokkuvõttes: lineaarse võrrandisüsteemi (1) kõigi lahendite leidmiseks tuleb tema laiendatud maatriks $\left(A, b\right)$ viia ridade elementaarteisendustega kujule (3), millele vastavast võrrandisüsteemist (4) selgub süsteemi (1) lahenduvus ja lahenduvuse korral ka kõik tema lahendid. Seda meetodit lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks nimetatakse **Gaussi meetodiks**. Selle meetodi kirjeldusest selgus ka lineaarse võrrandisüsteemi lahendite arv. Lineaarsel võrrandisüsteemil saab olla kas 0, 1 või lõpmata palju lahendeid.