Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \; x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

Definitsioon

Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.

Definitsioon

Arvu x^* *nimetatakse võrrandi* $f(x) = 0$ *lahendiks (funktsiooni* $f(x)$ *nullkohaks), kui*

$$f(x^*) \equiv 0.$$

Definitsioon

Arvu x^* *nimetatakse võrrandi* $f(x) = 0$ $k-$*kordseks lahendiks, kui*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.
Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:
1) leitakse alglähend x_0, milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.
Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Graafiline meetod
Mõnedel juhtudel on mõtekas võrrand $f(x) = 0$ kirjutada ümbes kujule $f_1(x) = f_2(x)$ ning joonistada kahe funktsiooni $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.
Näide 3 Näiteks võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ võib kirjutada kujul $x^3 = 1 - 2x$ ja siit joonistada $y = x^3$ ja $y = 1 - 2x$ graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta $0,4 \sim 0,5$.

Tabel
Kui $f(x)$ on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.
Meie näite puhul $f(0,4) = -0,136$ ja $f(0,5) = 0,125$.

Poolitamismeetod

Selle korral arvutatakse funktsiooni $f(x)$ väärtus lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunktis $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi $f(x) = 0$ lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \tag{1}$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.
Üks võimalus selleks on valida $C \neq 0$ ning

$$f(x) = 0 \,|\cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame $g(x) = x + Cf(x)$ ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

Näide
Võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ korral võib leida

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ või

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \tag{2}$$

st $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, jne.
Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.
Uurime meetodi viga:
olgu x^* võrrandi (1) täpne lahend, st $x^* \equiv g(x^*)$. Lähendi x_n tõeline viga on $|x_n - x^*|$.

Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks x^*, st $x_n \longrightarrow x^*$.
Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \tag{3}$$

Teoreem

Leidugu võrrandi (1) lahendit x^* sisaldav vahemik (a, b), milles on täidetud võrratus (3). Olgu funktsioon $g(x)$ selline, et $\forall x \in (a, b)$ korral $g(x) \in (a, b)$. Olgu $x_0 \in (a, b)$. Siis koondub hariliku iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada x_n täpseks lahendiks x^*. Lisaks kehtib veahinnang

$$\mid x_n - x^* \mid \leq \frac{q^n}{1-q} \mid x_1 - x_0 \mid . \tag{4}$$

Tõestus

Et $x_0 \in (a, b)$ ja $g(x)$ ei vii vahemikust (a, b) välja, siis
$x_1 = g(x_0) \in (a, b)$, $x_2 = g(x_1) \in (a, b), \ldots, x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$.
Et x^* on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi
(Punktide x_{n-1} ja x^* vahel leidub punkt c_n nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).)$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Teame, et $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$, järelikult ka $c_n \in (a, b)$. Meie eelduse põhjal $|g'(c_n)| \leq q < 1$.
Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)||(x_{n-1} - x^*)| \leq q|(x_{n-1} - x^*)|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q|x_{n-1} - x^*| \leq q^2|x_{n-2} - x^*| \leq \ldots \leq q^n|x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n|x_0 - x^*|. \tag{5}$$

Et $q < 1$, siis $q^n \longrightarrow 0$, kui $n \longrightarrow \infty$. Seega

$$|x_n - x^*| \longrightarrow 0, \text{ kui } n \longrightarrow \infty.$$

Koondumine $x_n \longrightarrow x^*$ on näidatud.

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus x^*. Tuletame praktilisema hinnangu.

$$|x_0 - x^*| = |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq$$
$$\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|.$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q}|x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega $1 - q$ ($1 - q > 0$, sest $q < 1$).
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).
/**mott**

Hinnangu (4) paremat poolt võib ka vaadelda, kui geomeetrilist jada $a, aq, aq^2, \ldots$, kus $a = \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}$. Et $q < 1$, siis on tegu hääbuva geomeetrilise jadaga ning võib öelda, et **harilik iteratsioonimeetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.**

Saab tõestada, et kui kõikjal lahendit x^* sisaldavas vahemikus $|g'(x)| > 1$, siis meetod ei koondu.

Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand
$x^3 + 2x - 1 = 0$.
Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju
1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja
2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.
Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend
$x_0 = 0,5 \in [0,1; 0,7]$.
Kontrollime tingimuse (3) täidetust.
1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.
$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.
Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.
$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.
Tingimus (3) pole täidetud.

Vastavalt tõestatud teoreemile oleme leidnud koonduva harilik iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

$$\ldots$$

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

Kontrolliks $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$.

Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose x_{n+1} ja x^* jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

uurus $x_n < c_{n+1} < x^*$. Kui n on suur, siis $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$. Seega $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$.
Kui $g'(x)$ on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks $a_n = g'(c_n)$, siis $a_n \approx g'(c_{n+1})$.

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud a_n ja x^*. Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse x^*:

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada x_{n+1} parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suuruse abil saab leida $x_{n+2} = g(\overline{x_{n+1}})$. Nüüd omakorda on võimalik x_{n+1}, $\overline{x_{n+1}}$ ja x_{n+2} põhjal leida $\overline{x_{n+2}}$. Siit $x_{n+3} = g(\overline{x_{n+2}})$, jne.

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q, seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri $x_n = g(x_{n-1})$ saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks.**
Newtoni meetod on ühesammuline meetod.
Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend x_0 peab olema otsitavale lahendile x^* piisavalt lähedal.
Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus γ sõltub konstandist K.

Näide Lahendame eelmise näite võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ Newtoni meetodiga.
Meil $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $f'(x) = 3x^2 + 2$.
Newtoni meetod $n-$nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$x_0 = 0,5$
$x_1 = \frac{2x_0^3+1}{3x_0^2+2} \approx 0,4545$
$x_2 = \frac{2x_1^3+1}{3x_1^2+2} \approx 0,4534$
$x_3 = \frac{2x_2^3+1}{3x_2^2+2} \approx 0,4534$

Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui Δx on väike, siis $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$ ning

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate ehk kõõlude meetodi**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kahesammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1{,}618},$$

kus $\beta > 0$.