

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

Leidub parajasti üks ülimalt n -astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks**.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$,
 $j = 0, 1, \dots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Diferentssuhte

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab m -järku diferentssuhte esitada $m - 1$ -järku diferentssuhte kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Polünoomi

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe n -astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \left[h_i(x)f(x_i) + \tilde{h}_i(x)f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = [1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi $H(x)$ nimetatakse Hermite'i polünoomiks.

Tükiti polünoomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusesele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusesele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse l -astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \rightarrow \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \rightarrow 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \rightarrow 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.

Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Interpoleerimine splineidega

Definitsioon

l -järku splineiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

- 1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l -astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;*
- 2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.*

Kõige lihtsam on spline esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

Linearsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus c_0, c_1, \dots, c_k on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1; 1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B -splainide lineaarkombinatsioonina.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad c_1, c_2, \dots, c_m saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$