Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.
Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylori valemit:
funktsiooni $f(x)$ Taylori valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

kus $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (x, a)$.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a+h$, kus $h>0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n=1$ võttes $x=a+h$. Saame

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,$$

kus $\xi\in(x,a)$. Et $x-a=a+h-a=h$, siis

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette.**

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left|\frac{f''(\xi)}{2}h\right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h.

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a-h$, kus $h>0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n=1$ võttes $x=a-h$, siis $x-a=a-h-a=-h$.
Saame

$$f(a-h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus kus $\xi \in (a-h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis
$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$
Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga taha.**
Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h.

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h>0$. Leiame Taylori valemi $n=2$ korral, kui $x=a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \qquad (*)$$

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a-h, a)$.
Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks.**
Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2.

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks. Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a-h$, a ja $a+h$, kus $h>0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n=3$ kahel juhul: kõigepealt $x=a+h$, siis $x-a=a+h-a=h$, teiseks $x=a-h$, siis $x-a=a-h-a=-h$. Saame vastavalt

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \qquad (***)$$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2-\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \qquad (****)$$

$\xi\in(a,a+h)$ ja $\eta\in(a-h,a)$.
Liidame seosed (***) ja (****), saame

$$f(a+h)+f(a-h)=2f(a)+2\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4+\frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!}h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.
Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x)dx$$

leidmist.
Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.
Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.
Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

kus A_i on mingid kordajad ja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Newton-Cotesi kvadratuurvalem
Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema polünomiaalse interpolandiga sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Siis

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \Phi_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x)f(x_i)dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x)dx\right] f(x_i).$$

Tähistades $A_i = \displaystyle\int_a^b L_{n,i}(x)dx$, olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Kordajate A_i leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}\, dx.$$

Ühtlase võrgu korral ($h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus B_i väärtusi saab leida käsiraamatutest.

Näiteks

n	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Üldiselt kasutatakse polünomiaalse interpolandi asemel tükiti polünomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx.$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}[f(x_{i-1} + f(x_i)].$$

Seega

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] +$$

$$\ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks.** Trapetsvalemi viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \dfrac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| \leq Ch^2$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.
Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx.$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx = \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})].$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] +$$

$$+ \frac{h}{3}[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \ldots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \right.$$

$$\left. + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osalõike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} \Phi(x)dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} \Phi(x)dx \right| \leq Ch^4.$$