Diferentsiaalvõrrandid

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.
Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

1. järku HDV üldkuju on järgmine:

$$F(x, y, y') = 0,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon.
Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu avaldatud, siis see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV normaalkuju järgmine:

$$y' = f(x, y),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, y, y'y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ja

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.
$n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.
Diferentsiaalvõrrandi erilahendi graafikut nimetatakse selle võrrandi integraalkõveraks. Seega võib $n-$järku HDV üldlahendit geomeetriliselt tõlgendada kui $n-$parameetrist sõltuvat integraalkõverate parve.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0^0, \\ y^{(1)}(x_0) = y_0^1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Seda ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.
Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.

Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

Kasvamine ja kahanemine

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, t on sõltumatu muutuja ja k on võrdetegur.

Radioktiivne lagunemine

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil t. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

Soojenemine ja jahenemine
Olgu ajahetkel t keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur T_0, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.
Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?

Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Määrame konstandi k :

$$k = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0} \right) = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{18 - 30,5}{23 - 30,5} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \ln \left(\frac{12,5}{7,5} \right) = 0.051$$

$$T(t) = 30,5 + (18 - 30,5)e^{-0,051t} =$$

$$= 30,5 - 12,5e^{-0,051t}$$

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset$ **R.** Olgu D selline, et $\forall(x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D \; \forall t > 0$.
Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0$, $\forall(x, y) \in D$.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

Lineaarne DV

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (6)$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit). Nimelt asendataksey_h konstant C sobiva funktsiooniga $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (6).

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja y_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi y lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $y_1, y_2, y_3, \ldots$ nii, et $y_i \approx y(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Euleri meetod

$$uy_{i+1} = uy_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Keskpunkti meetod

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$y_{i+1} = y_i + c_1 hf(x_i, y_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, y_i + \beta hf(x_i, y_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.