IV peatükk
MAATRIKSID

§ 1. Maatriksi mõiste

Maatriksi mõiste on lineaaralgebras tähtis mõiste. Maatrikssümboolika abil on paremini kirjeldatavad paljud teisendused. Maatriksite tähistena kasuatakse tavaliselt ladina tähestiku suuri tähti.

Def. 1. $(m \times n)$**-maatriksiks** nimetatakse *m* reast ja *n* veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

($a_{ij} \in \mathbb{R}$ iga *i* ja *j* korral).

Tabeli ääristusena võib kasutada ka kahte kriipsu või nurksulge (mitte mingil juhul ei tohi kasutada ühte kriipsu):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{või} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Üherealise ja üheveerulise maatriksi puhul jäetakse sulud või äärekriipsud ära, näiteks $(-4) = -4$. Kui kontekstist on selge maatriksiksi *A* ridade ja veergude arv, siis tähistatakse teda lühidalt ka

$$A = (a_{ij}) \quad \text{või} \quad A = \|a_{ij}\| \quad \text{või} \quad A = [a_{ij}].$$

Arve a_{ij} maatriksist (1) nimetatakse **maatriksi elementideks**. Esimene indeks märgib reanumbrit, teine indeks veerunumbrit.

Kõigi $(m \times n)$-maatriksite hulka tähistatakse $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Def. 2. Maatriksit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nimetatakse ***n*-ndat järku ruutmaatriksiks**, kui tema ridade arv *m* võrdub tema veergude arvuga *n*. Seejuures öeldakse, et arvud $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

asuvad maatriksi *A* **peadiagonaalil** ja arvud $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ asuvad maatriksi *A* **kõrvaldiagonaalil**.

Def. 3. **Diagonaalmaatriksiks** nimetatakse ruutmaatriksit, mille elemendid väljaspool peadiagonaali võrduvad nulliga.

Diagonaalmaatriksi üldkuju on

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ja sellist diagonaalmaatriksit tähistatakse $diag(a_1; a_2; \dots; a_n)$.

Def. 4. Maatriksi (1) **reavektoriteks** nimetatakse aritmeetilisi vektoreid

$$\alpha_1 = (a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}),$$
$$\alpha_2 = (a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_m = (a_{m1}; a_{m2}; \dots; a_{mn}).$$

Def. 5. Maatriksi (1) **veeruvektoriteks** nimetatakse aritmeetilisi vektoreid

$$\beta_1 = (a_{11}; a_{21}; \dots; a_{m1}),$$
$$\beta_2 = (a_{12}; a_{22}; \dots; a_{m2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_n = (a_{1n}; a_{2n}; \dots; a_{mn}).$$

Kui maatriksi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reavektorid on $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ja veeruvektorid on $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, siis kasutatakse ka tähistusi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

§ 2. Lineaarsed tehted maatriksitega

Lineaarseteks teheteks on liitmine ja skalaariga (ehk arvuga) korrutamine. Need defineeritakse järgmiselt.

Def. 1. $(m\times n)$-maatriksite $A=(a_{ij})$ ja $B=(b_{ij})$ **summaks** nimetatakse $(m\times n)$-maatriksit $A+B=(c_{ij})$, kus $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kõigi indeksite *i* ja *j* võimalike väärtuste korral.

Sellest definitsioonist nähtub, et maatriksite liitmiseks tuleb liidetavates samade indeksitega elemendid liita.

Def. 2. Maatriksi $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ **korrutiseks skalaariga** $c\in\mathbb{R}$ nimetatakse maatriksit $cA=c\cdot A=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, kus $c_{ij}=ca_{ij}$ kõigi indeksite *i* ja *j* võimalike väärtuste korral.

Definitsioonist nähtub, et maatriksi korrutamiseks arvuga *c* tuleb tema kõik elemendid läbi korrutada selle arvuga.

Kui teostada lineaarseid tehteid hulga $\mathbb{R}^{m\times n}$ elementidega, siis tehete tulemus kuulub samuti hulka $\mathbb{R}^{m\times n}$, s.t. liitmine ja skalaariga korrutamine on tehted hulgal $\mathbb{R}^{m\times n}$. Lineaarsed tehted hulgal $\mathbb{R}^{m\times n}$ rahuldavad analoogseid omadusi nagu lineaarsed tehted geomeetriliste vektorite hulgal. Loetleme need omadused.

1° $A+B=B+A$ iga $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral (liitmise kommutatiivsus);

2° $(A+B)+C=A+(B+C)$ iga $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral (liitmise assotsiatiivsus);

3° leidub selline maatriks $\theta\in\mathbb{R}^{m\times n}$, et $A+\theta=\theta+A=A$ iga $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral (nullmaatriksi olemasolu);

4° iga maatriksi $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ jaoks leidub selline maatriks $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, et $A+B=B+A=\theta$ (vastandmaatriksi olemasolu);

5° $(a+b)A=aA+bA$ iga $a,b\in\mathbb{R}$ ja $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral;

6° $a(A+B)=aA+aB$ iga $a\in\mathbb{R}$ ja $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral;

7° $(ab)A=a(bA)$ iga $a,b\in\mathbb{R}$ ja $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral;

8° $1A=A$ iga $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral.

Need omadused järelduvad vahetult tehete definitsioonidest ja reaalarvudega teostatavate tehete omadustest.

Nullmaatriks on maatriks

$$\theta=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Maatriksi $A=(a_{ij})$ vastandmaatriksit *B* omadusest 4° tähistatakse $-A$ ja

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Assotsitiivsus kehtib ka rohkem kui kolme liidetava korral ja seetõttu pole maatriksite liitmisel sulgude paigutus tehete sooritamise järjekorra näitamiseks vajalik.

§ 3. Maatriksite korrutamine

Def. 1. Maatriksi

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

mille reavektoriteks on $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, **korrutiseks** maatriksiga

$$B=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times p},$$

mille veeruvektorid on $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, nimetatakse maatriksit

$$AB = A\cdot B=\begin{pmatrix} \alpha_1\cdot\beta_1 & \alpha_1\cdot\beta_2 & \dots & \alpha_1\cdot\beta_p \\ \alpha_2\cdot\beta_1 & \alpha_2\cdot\beta_2 & \dots & \alpha_2\cdot\beta_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m\cdot\beta_1 & \alpha_m\cdot\beta_2 & \dots & \alpha_m\cdot\beta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p},$$

kus $\alpha_i \cdot \beta_j$ tähistab vektorite α_i ja β_j skalaarkorrutist.

Toodud definitsioonist selgub, et korrutis *AB* on teostatav, kui maatriksi *A* veergude arv võrdub maatriksi *B* ridade arvuga.

Maatriksite korrutamise omadused ja seosed lineaarsete tehete ning korrutamise vahel on järgmised:

1) maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne, s.t. leiduvad sellised maatriksid *A* ja *B*, et $AB \neq BA$;
2) maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, s.t.
$$A(BC)=(AB)C \tag{1}$$
alati, kui vaadeldavad maatriksid on korrutatavad;
3) liitmine ja korrutamine on seotud distributiivsusega, s.t.
$$A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC$$
alati, kui antud tehted on teostatavad;
4) kui eksisteerib maatriksite korrutis *AB*, siis
$$a(AB)=(aA)B=A(aB)$$
iga $a\in\mathbb{R}$ korral.

Omaduse 2) *tõestus*. Tõestuseks valime maatriksid *A*, *B*, ja *C* nii, et korrutamised $A(BC)$ ja $(AB)C$ oleksid teostatavad:

$$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}\,,\quad B=(b_{jk})\in\mathbb{R}^{n\times p}\,,\quad C=(c_{kl})\in\mathbb{R}^{p\times q}.$$

Siis

$$BC=(u_{jl})\in\mathbb{R}^{n\times q}\,,\quad A(BC)=(x_{il})\in\mathbb{R}^{m\times q}\,,$$
$$AB=(v_{ik})\in\mathbb{R}^{m\times p}\,,\quad (AB)C=(y_{il})\in\mathbb{R}^{m\times q}\,,$$

mistõttu võrduse (1) põhjendamiseks tuleb näidata, et maatriksite $A(BC)$ ja $(AB)C$ *i*-nda rea ja *l*-nda veeru elemendid x_{il} ja y_{il} langevad kokku iga $i\in\{1,2,\dots,m\}$ ja $l\in\{1,2,\dots,q\}$ korral. Teeme seda.

Maatriksi $A(BC)$ *i*-nda rea ja *l*-nda veeru element x_{il} saadakse maatriksi *A* *i*-nda reavektori

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$$

ja maatriksi *BC* *l*-nda veeruvektori

$$\xi_l=(u_{1l},u_{2l},\dots,u_{nl})$$

skalaarkorrutisena

$$x_{il}=\alpha_i\cdot\xi_l=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{jl}\,. \tag{2}$$

Maatriksi *BC* *j*-nda rea ja *l*-nda veeru element u_{jl} saadakse maatriksi *B* *j*-nda reavektori

$$\beta_j=(b_{j1},b_{j2},\dots,b_{jp})$$

ja maatriksi *C* *l*-nda veeruvektori

$$\gamma_l=(c_{1l},c_{2l},\dots,c_{pl})$$

skalaarkorrutisena

$$u_{jl}=\beta_j\cdot\gamma_l=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\,. \tag{3}$$

Võrdustest (2) ja (3) summa märgi omaduste põhjal

$$x_{il}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\,. \tag{4}$$

Maatriksi $(AB)C$ *i*-nda rea ja *l*-nda veeru element y_{il} saadakse maatriksi *AB* *i*-nda reavektori

$$\eta_i=(v_{i1},v_{i2},\dots,v_{ip})$$

ja maatriksi *C* *l*-nda veeruvektori

$$\gamma_l=(c_{1l},c_{2l},\dots,c_{pl})$$

skalaarkorrutisena

$$y_{il}=\eta_i\cdot\gamma_l=\sum_{k=1}^{p}v_{ik}c_{kl}\,. \tag{5}$$

Maatriksi *AB* *i*-nda rea ja *k*-nda veeru element v_{ik} saadakse maatriksi *A* *i*-nda reavektori

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$$

ja maatriksi *B* *k*-nda veeruvektori

$$\zeta_k=(b_{1k},b_{2k},\dots,b_{nk})$$

skalaarkorrutisena

$$v_{ik} = \alpha_i \cdot \zeta_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \ . \tag{6}$$

Võrdustest (5) ja (6)

$$y_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} c_{kl} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \, . \tag{7}$$

Avaldistest (4) ja (7) järeldubki vajalik võrdus $x_{il} = y_{il}$.

Def. 2. ***m*-ndat järku ühikmaatriksiks** nimetatakse *m*-ndat järku ruutmaatriksit

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = diag\left(1; 1; \ldots; 1\right) \in \mathbb{R}^{m \times m} .$$

Teoreem. Kui $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, siis

$$E_m A = A E_n = A .$$

Teoreemi põhjendamiseks tuleb leida korrutised $E_m A$ ja AE_n ning veenduda , et need võrduvad maatriksiga *A*. Kui kontekstist on selge ühikmaatriksi järk, siis jäetakse järku näitav indeks kirjutamata.

§ 4. Maatriksite transponeerimine

Def. 1. Maatriksi $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit $A^T=\left(b_{ji}\right)\in\mathbb{R}^{n\times m}$, mille veeruvektoriteks on parajasti maatriksi *A* reavektorid (maatriksi *A* read on paigutatud maatriksi A^T veergudeks), s.t. $b_{ji}=a_{ij}$ iga *i* ja *j* võimaliku väärtuse korral.

Def. 2. Üleminekut maatriksilt *A* maatriksile A^T nimetatakse maatriksi *A* **transponeerimiseks**.

Def. 3. Ruutmaatriksit *A* nimetatakse **sümmeetriliseks maatriksiks**, kui $A^T=A$.

Sümmeetriline maatriks $A=\left(a_{ij}\right)$ peab tingimata olema ruutmaatriks ja $a_{ij}=a_{ji}$ iga *i* ja *j* väärtuse korral.

Esitame tõestuseta järgmise teoreemi.

Teoreem. Maatriksite transponeerimisel kehtivad reeglid:

1) $\left(A^T\right)^T=A$ iga maatriksi *A* korral;

2) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$ iga $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ korral;

3) $\left(cA\right)^T=cA^T$ iga $c\in\mathbb{R}$ ja maatriksi *A* korral;

4) $\left(AB\right)^T=B^TA^T$ iga $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ korral.

§ 5. Elementaarteisendused maatriksi ridade ja veergudega

Vaatleme $\left(m\times n\right)$- maatriksit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Def. Maatriksi *A* **ridade elementaarteisenduseks** nimetatakse üleminekut maatriksilt *A* maatriksile *B* järgmise kahe võimaliku reegli abil:

1° maatriksi *A* mingile reavektorile liidetakse mingi arvu kordne maatriksi A mingi teine reavektor;

2° maatriksi *A* mingit reavektorit korrutatakse mingi nullist erineva arvuga.

Üleminekut maatriksilt *A* maatriksile *B* mingi ridade elementaarteisendusega tähistatakse

$$A\to B,$$

kusjuures sageli näidatakse parema jälgitavuse huvides teisendatava rea kõrval ka tehtav teisendus.

Analoogselt defineeritakse antud maatriksi veergude elementaarteisendused. Tehtav teisendus märgitakse vastava veeru all või kohal.

Esitame tõestuseta järgmise teoreemi.

Teoreem 1. Kui maatriks $\hat{A}$ on saadud maatriksist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mingi reavektorite elementaarteisenduse teel ja maatriks $\hat{E}$ on saadud *m*-ndat järku ühikmaatriksist sama ridade elementaarteisenduse teel, siis

$$\hat{A} = \hat{E}A. \tag{2}$$

Näide. Rakendades maatriksi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

reavektoritele teisendust “teisele reale (-2)-kordse esimese rea liitmine”, saame maatriksi

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ -6 & 8 & -7 & -13 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rakendades sama teisendust ühikmaatriksile

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

saame

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Korrutades saame

$$\hat{E}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ -6 & 8 & -7 & -13 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \hat{A}.$$

Analoogne teoreem veergude elementaarteisenduse kohta on järgmine.

Teoreem 2. Kui maatriks $\hat{A}$ on saadud maatriksist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mingi veeruvektorite elementaarteisenduse teel ja maatriks $\hat{E}$ on saadud *n*-ndat järku ühikmaatriksist sama veergude elementaarteisenduse teel, siis

$$\hat{A} = A\hat{E}. \tag{3}$$

Järgnevast skeemist selgub, et maatriksi kahe rea asukoha vahetamine on teostatav ridade elementaarteisenduste abil (skeemil on α lähtemaatriksi *i*-s reavektor ja β *j*-s reavektor, $i \neq j$):

$$\begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ +i.\,rida \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha+\beta \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ +(-1)\cdot j.\,rida \\ \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \vdots \\ -\beta \\ \vdots \\ \alpha+\beta \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ +i.\,rida \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ -\beta \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Analoogne väide kehtib maatriksi veergude vahetamise kohta.

Teoreem 3. Iga nullmaatriksist erinev maatriks $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ on ridade elementaarteisendustega viidav kujule

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1.\,rida \\ 2.\,rida \\ \\ k.\,rida\,, \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{4}$$

kus maatriksi viimases *m* - *k* reas on kõik arv nullid, esimeses *k* reas aga esinevad *k*-järku ühikmaatriksi kõik veerud mistahes järjekorras.

Tõestus. Kuna maatriks *A* pole nullmaatriks, siis leidub tal element $a_{kl}\neq 0$. Muudame maatriksi *A* ridade järjekorda nii, et tema *k*-s rida satub esimeseks reaks (see on teostatav ridade elementaarteisendustega). Saame maatriksi

$$\begin{pmatrix} \dots\, a_{kl}\, \dots \\ \dots\, c_2\, \dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\, c_m\, \dots \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Korrutades maatriksi (5) esimest rida arvuga a_{kl}^{-1} ja liites saadud maatriksi teisele reale $\left(-c_2\right)$-kordse esimese rea, seejärel saadud maatriksi kolmandale reale $\left(-c_3\right)$-kordse esimese rea jne., saadakse maatriks

$$\begin{pmatrix} \ldots 1 \ldots \\ \ldots 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots 0 \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots 1 \ldots \\ A_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(A_1 on võrduse (6) vasakul pool esineva maatriksi teisest reast kuni *m*-nda reani koosnev osa; teda vaadeldakse samuti maatriksina). Üks ühikmaatriksi veergudest on saadud. Kui maatriksi A_1 kõik elemendid on nullid, siis on kuju (4) saadud $(k = 1)$. Kui maatriksis A_1 esineb nullist erinev arv, siis toimides maatriksiga A_1 analoogselt nagu üleminekil maatriksilt *A* maatriksile (6), saame maatriksi (6) viia kujule

$$\begin{pmatrix} \ldots 1 \ldots 0 \ldots \\ \ldots 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots 1 \ldots 0 \ldots \\ \ldots 0 \ldots 1 \ldots \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Kui maatriks A_2 koosneb nullidest, siis on kuju (4) saadud $(k = 2)$. Kui aga maatriksis A_2 leidub nullist erinevaid arve, siis ka maatriksiga A_2 toimitakse nii, nagu toimiti maatriksitega *A* ja A_1. Jätkates analoogset protsessi, jõutaksegi lõpuks maatriksini (4).

Analoogselt teoreemiga 3 tõestatakse järgmine teoreem.

Teoreem 4. Iga nullmaatriksist erinev maatriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on veergude elementaarteisendustega viidav kujule

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

kus maatriksi (7) viimases $n - k$ veerus on nullid, esimeses *k* veerus aga esinevad *k*-ndat järku ühikmaatriksi kõik read mis tahes järjekorras.

Teoreemidest 3 ja 4 järeldub järgmine teoreem.

Teoreem 5. Iga nullmaatriksist erinev maatriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on ridade ja veergude elementaarteisendustega viidav kujule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \textit{nullid} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \\ & & \textit{nullid} & & \end{pmatrix}, \tag{8}$$

kus maatriksi (8) ülal vasakul nurgas on *k*-ndat järku ühikmaatriks, mujal esinevad arvud on aga kõik nullid.

Maatriksit (8) on hea esitada nn. blokkide kujul (blokk tähendab siin maatriksi osa)

$$\begin{pmatrix} E & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}, \tag{9}$$

kus E on *k*-ndat järku ühikmaatriks ja θ on nullmaatriks, mille ridade ja veergude arv peab selguma kontekstist.