MATEMAATILINE ANALÜÜS

MÕISTED, VALEMID, NÄITED, ÜLESANDED

Sisukord

Funktsiooni üldised omadused	2
Elementaarfunktsioonid	4
Näited funktsiooni määramispiirkonna leidmisest	11
Ülesanded määramispiirkonna kohta	16
Lineaarfunktsioon ja ruutfunktsioon	18
Ülesanded lineaarfunktsioonist ja ruutfunktsioonist	22
Funktsiooni piirväärtus	23
Näited funktsiooni piirväärtuse arvutamisest	24
Piirväärtuse arvutamise ülesanded	33
Funktsiooni tuletis	35
Tuletiste table	37
Näited funktsiooni tuletise võtmise kohta	38
Logaritmiline diferentseerimine. Näited	43
Ilmutamata kujul antud funktsiooni tuletis. Näited	44
Ülesanded tuletise võtmise kohta	45
Joone puutuja ja funktsiooni diferentsiaal	47
Ülesanded joone puutuja ja diferentsiaali kohta	52
Funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid	53
Ülesanded funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkondade ning ekstreemumite kohta	60
Näited funktsiooni ekstreemumi rakendusest	61
Ülesanded funktsiooni ekstreemumi rakenduse kohta	66
Algfunktsioon ja määramata integraal	67
Põhilised määramata integraalid	68
Määramata integraali omadusi	68
Näited põhiliste määramata integraalide ja määramata integraali omaduste kohta	69
Näited muutuja vahetusest määramata integraalis	69
Ositi integreerimine	72
Määramata integraalide avaldamise ülesanded	74
Määratud integral	75
Määratud integraali omadusi	77
Määratud integraali arvutusvalem	78
Määratud integraali arvutamise ülesanded	81
Mitme muutuja funktsioon	82
Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline kujutamine	83
Kahe muutuja funktsiooni osamuut	84
Kahe muutuja funktsiooni osatuletised	85
Kahe muutuja funktsiooni teist järku osatuletised	86
Kahe muutuja funktsiooni lokaalne maksimum ja miinimum	86
Ülesanded kahe muutuja funktsiooni kohta	94

MATEMAATILINE ANALÜÜS

Funktsiooni üldised omadused

Järgnevas on **muutuv suurus** selline suurus, mis võib omandada mitmesuguseid reaalarvulisi väärtusi. Nende väärtuste hulka nimetatakse muutuva suuruse **muutumispiirkonnaks**.

Sageli esinevad järgmised muutumispiirkonnad.

Kahe antud arvu a ja b $(a<b)$ vahel asetsevate arvude x hulka nimetatakse **vahemikuks** ehk **lahtiseks vahemikuks**, kusjuures arvud a ja b ise ei kuulu vaadeldavate arvude hulka. Tähis kas (a,b) või võrratustega $a<x<b$.

Lõiguks ehk **kinniseks vahemikuks** nimetatakse kahe antud arvu a ja b vahel asetsevate arvude x hulka, kusjuures arvud a ja b kuuluvad mõlemad vaadeldavasse hulka. Tähis kas $[a,b]$ või võrratustega $a \le x \le b$.

Kui arv a kuulub nende väärtuste hulka, mida x võib omandada, aga arv b mitte, saame poolkinnise vahemiku ehk **poollõigu** $[a,b)$ või võrratustega $a \le x < b$.

Kui arv b kuulub x väärtuste hulka, aga a mitte, saame poollõigu $(a,b]$ või $a < x \le b$.

Kui muutuv suurus x omandab mistahes väärtusi, mis on suuremad kui a, siis märgitakse seda vahemikku $(a,+\infty)$ või $a<x<+\infty$. Analoogselt $a \le x < +\infty, \quad -\infty < x < b, \quad -\infty < x \le c, \quad -\infty < x < +\infty$.

Suurust, mille väärtus ei muutu, nimetatakse **jäävaks** ehk **konstantseks suuruseks**.

Kui muutuja x igale väärtusele piirkonnas X vastab muutuja y kindel väärtus, siis öeldakse, et y on muutuja x **funktsioon** piirkonnas X.

Muutujat x nimetatakse funktsiooni **argumendiks** ehk **sõltumatuks muutujaks** ja vastavalt funktsiooni y ka **sõltuvaks muutujaks**.

Argumendi x muutumispiirkonda X nimetatakse funktsiooni y **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni väärtused, mis vastavad kõigile argumendi väärtustele piirkonnas X, moodustavad funktsiooni **muutumispiirkonna** Y.

Seega funktsioon korraldab ühese vastavuse kahe hulga X ja Y elementide vahel. Funktsiooni üldtähiseks on $y=f(x)$. Tähiseks võib olla ka $y=y(x)$, see kirjaviis rõhutab, et y on muutuja x funktsioon.

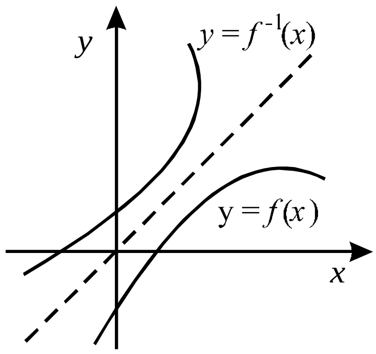
Paarisfunktsiooni tunnuseks on $f(-x) = f(x)$, paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline *y*-telje suhtes.

Paaritu funktsiooni tunnuseks on $f(-x) = -f(x)$, paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Funktsiooni **perioodilisuse** tunnuseks on $f(x+nT) = f(x),\ n \in \mathbb{Z}$, kus *T* on lühim periood (näit. siinusfunktsioonil 2π). Hulk $\mathbb{Z}$ on täisarvude hulk.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ korral on tegemist üksühese vastavusega ja valemist $y = f(x)$ saab seose $x = g(y)$, milles muutuja *y* loetakse argumendiks ning *x* funktsiooniks, siis seost $x = g(y)$ nimetatakse (otsese) funktsiooni $y = f(x)$ **pöördfunktsiooniks**. Pöördfunktsiooni võib tähistada näiteks sümboliga $y = f^{-1}(x)$.

Pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on otsese funktsiooni muutumispiirkond ja muutumispiirkonnaks otsese funktsiooni määramispiirkond. Otsese ja pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes:



Liitfunktsiooni korral on tegemist kahekordse (või enama) vastavusega $(x \to u \to y)$:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \quad \text{ehk} \quad y = f\left[g(x)\right].$$

Funktsiooni $y = f(x)$

1) **nullkohtade** leidmiseks lahendatakse võrrand $f(x) = 0$;
2) **positiivsuspiirkonna** X^+ leidmiseks lahendatakse võrratus $f(x) > 0$;
3) **negatiivsuspiirkonna** X^- leidmiseks lahendatakse võrratus $f(x) < 0$.

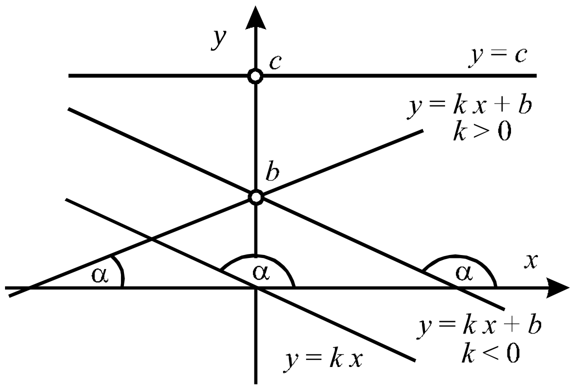
Elementaarfunktsioonid

Järgnevas on hulk $\mathbb{R}$ reaalarvude hulk.

1. **Konstantne funktsioon** $y = c$ (joon. 1).
2. **Võrdeline sõltuvus** (joon. 1):

   $y = kx$, $k = \tan\alpha$, $0 \le \alpha < \pi$, paaritu funktsioon. Määramispiirkond $X = \mathbb{R}$.
3. **Lineaarfunktsioon** (joon. 1):

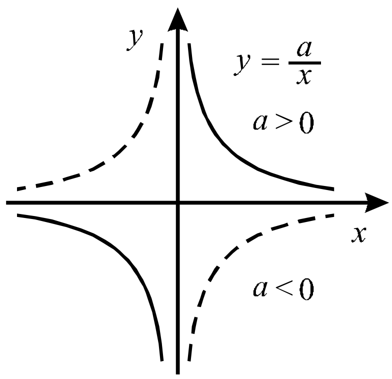
   $y = kx + b$, $k = \tan\alpha$, $0 \le \alpha < \pi$, ei paaris ega paaritu, kui $b \ne 0$. $X = \mathbb{R}$.



Joon. 1

4. **Pöördvõrdeline sõltuvus** (joon. 2):

   $y = \dfrac{a}{x}$, graafikuks on võrdhaarne hüperbool, graafik läheneb koordinaattelgedele, paaritu funktsioon. $X = (-\infty\ ;\ 0) \cup (0\ ;\ \infty)$.



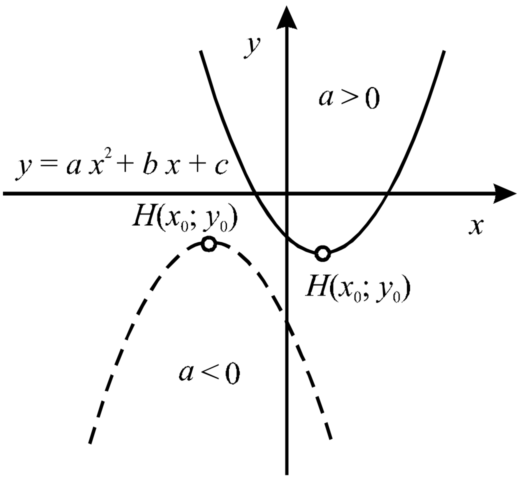
Joon. 2

5. Ruutfunktsioon:

$y = x^2$, graafikuks on põhiparabool (joon. 6), paarisfunktsioon. $X = \mathbb{R}$.

$y = ax^2 + bx + c$ (ka ruutpolünoom), graafikuks on parabool (joon. 3). $X = \mathbb{R}$.

Haripunkti *H* koordinaadid: $\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$

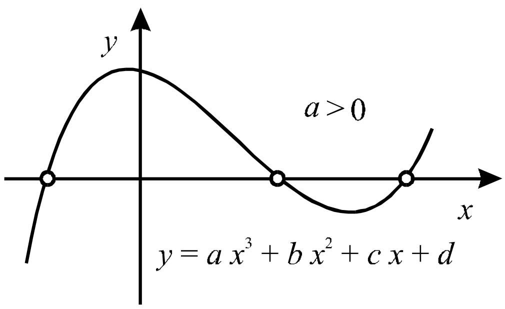


Joon. 3

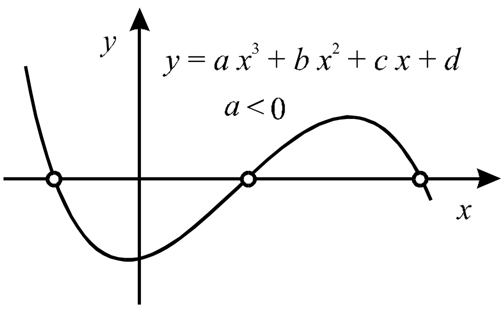
6. Kuupfunktsioon:

$y = x^3$, graafikuks on kuupparabool (joon. 7), paaritu funktsioon. $X = \mathbb{R}$.

Kuuppolünoom $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (joon. 4, $a > 0$; joon. 5, $a < 0$). $X = \mathbb{R}$.



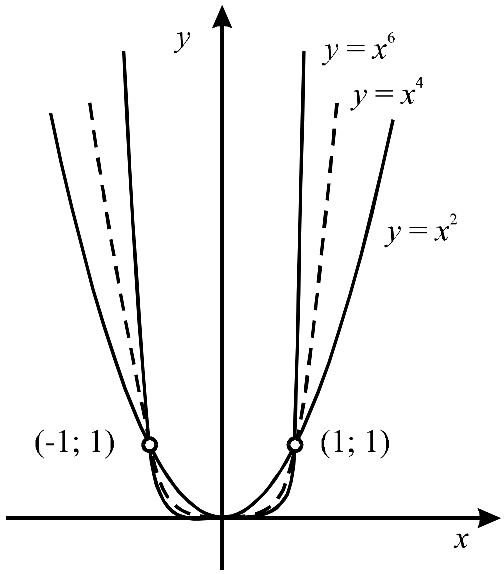
Joon. 4



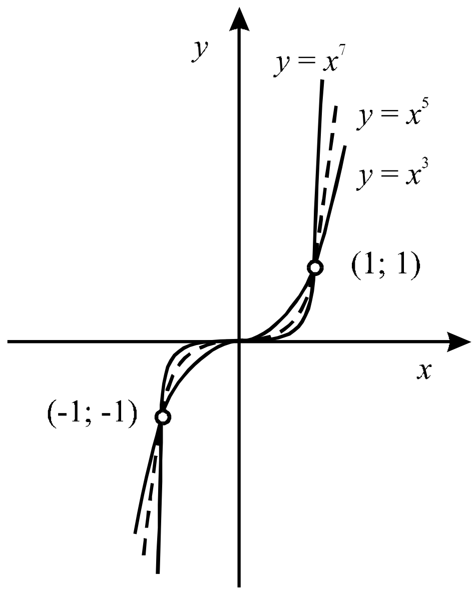
Joon. 5

7. **Astmefunktsioon**:

$y = x^n$ (joon. 6, n on paarisarv; joon. 7, n on paaritu arv). $X = \mathbb{R}$.



Joon. 6

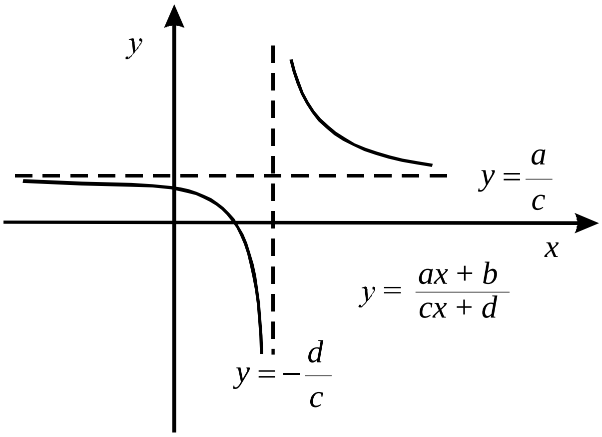


Joon. 7

8. **Murdlineaarne funktsioon** (joon. 8):

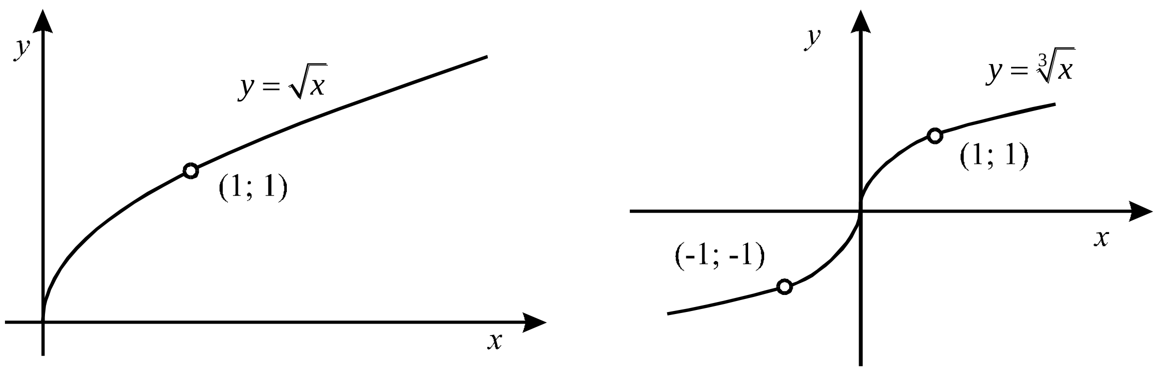
$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, graafik läheneb sirgetele $x=-\dfrac{d}{c}$ ja $y=\dfrac{a}{c}$.

$X=\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c}\ ;\ \infty\right)$.



Joon. 8

9. **Juurfunktsioonid** $y=\sqrt{x}$, $X=[0\ ;\ \infty)$ ja $y=\sqrt[3]{x}$, $X=\mathbb{R}$, millest viimane on paaritu funktsioon (joon. 9).

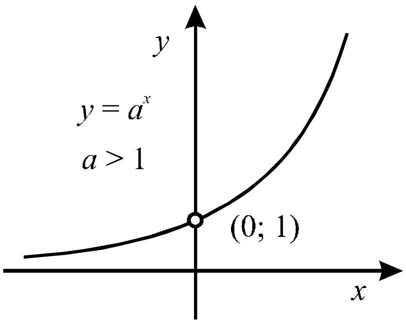


Joon. 9

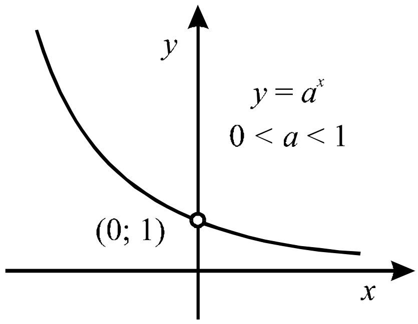
10. **Eksponentfunktsioon** (joon. 10, 11):

$y=a^x$ $(a>0$ ja $a\neq 1)$, graafik läheneb x-teljele. $X=\mathbb{R}$.

Olulisem erijuht: $y=e^x$.



Joon. 10

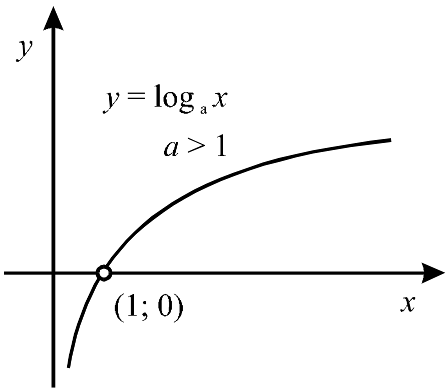


Joon. 11

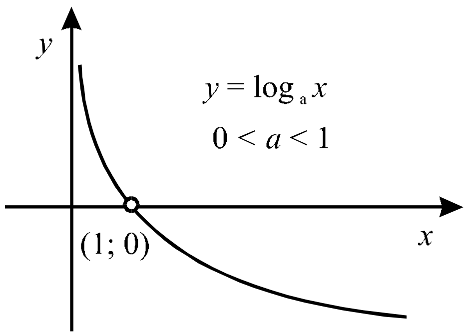
11. **Logaritmfunktsioon** (joon. 12, 13):

$y = \log_a x$ $(a > 0$ ja $a \neq 1)$, graafik läheneb y-teljele. $X = (0\ ;\ \infty)$.

Olulisemad erijuhud: $y = \log x$, $y = \ln x$.



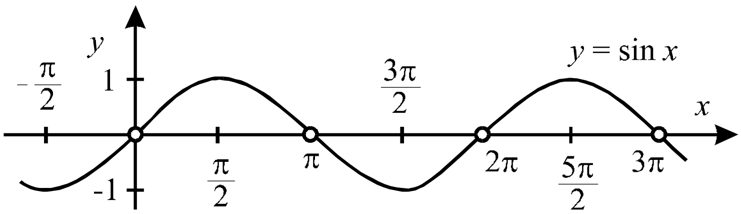
Joon. 12



Joon. 13

12. **Siinusfunktsioon** (joon. 14):

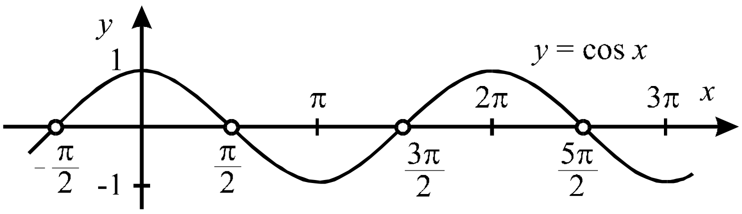
$y = \sin x$, graafikuks on sinusoid, paaritu funktsioon, periood on 2π. $X = \mathbb{R}$.



Joon. 14

13. **Koosinusfunktsioon** (joon. 15):

$y = \cos x$, graafikuks on sinusoid, paarisfunktsioon, periood on 2π. $X = \mathbb{R}$.



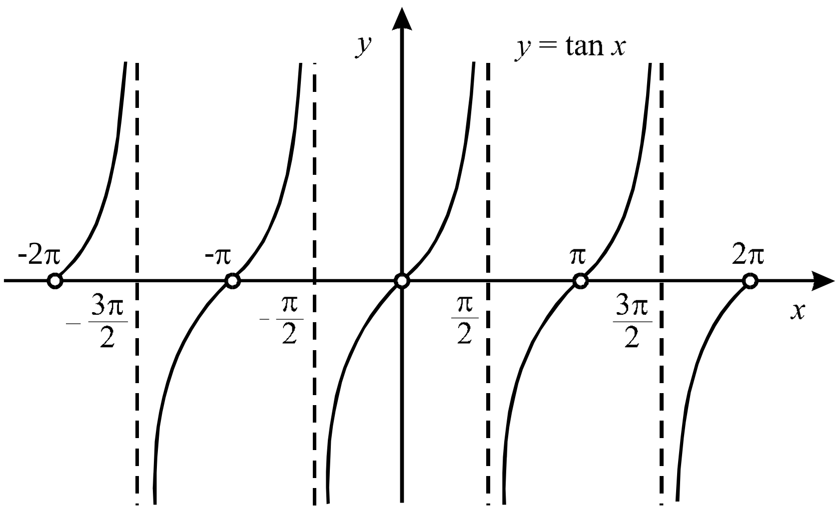
Joon. 15

14. **Tangensfunktsioon** (joon. 16):

$y = \tan x$, graafikuks on tangensoid, graafik läheneb sirgetele

$x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, paarisfunktsioon, periood on π.

$X = \left\{ x \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \right\},\ n \in \mathbb{Z}$.



Joon. 16

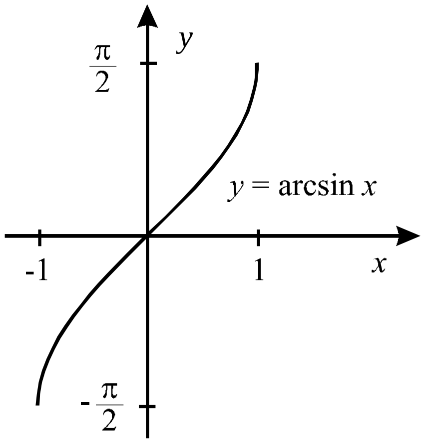
15. **Arkussiinusfunktsioon** (joon. 17):

$y = \arcsin x$, paaritu funktsioon. Määramispiirkond $X = [-1\,;\,1]$,

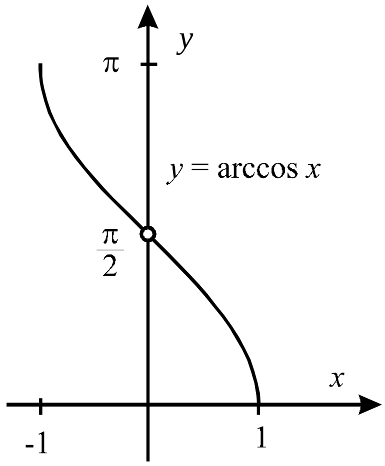
muutumispiirkond $Y = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2} \right]$.

16. **Arkuskoosinusfunktsioon** (joon. 18):

$y = \arccos x$. $X = [-1\,;\,1]$, $Y = [0\,;\,\pi]$.



Joon. 17

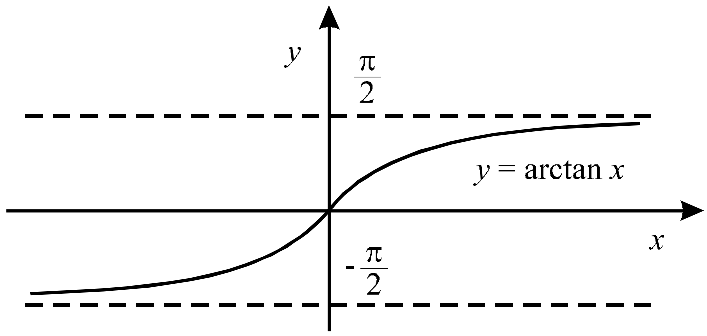


Joon. 18

17. **Arkustangensfunktsioon** (joon. 19):

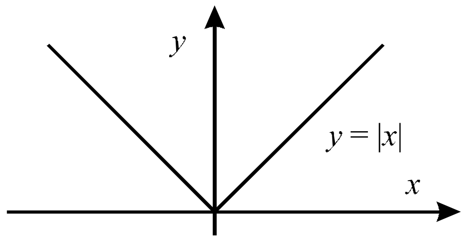
$y = \arctan x$, graafik läheneb sirgetele $y = -\dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$, paaritu funktsioon.

$X = \mathbb{R}$, $Y = \left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Joon. 19

18. **Funktsioon** $\boldsymbol{y = |x|}$ ehk $y = \begin{cases} x\,, & \text{kui } x \ge 0 \\ -x\,, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$ (joon. 20), paarisfunktsioon.



Joon. 20

Näited funktsiooni määramispiirkonna leidmisest

Järgnevates näidetes leiame funktsiooni nn. loomuliku määramispiirkonna, mis lähtub funktsiooni analüütilisest avaldisest.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y=\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ määramispiirkonna.

Lahendus. Murd $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ on määratud, kui selle murru nimetaja ei ole võrdne nulliga. Sellepärast leiame antud funktsiooni määramispiirkonna tingimusest $x^2-1\neq 0$ ehk $x^2\neq 1$ ehk $x\neq \pm 1$ [tuletame meelde, et ka $(-1)^2=1$].

Seega, kui tähistame määramispiirkonna tähega *X*, siis $X=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Näide 2. Leiame funktsiooni $y=\sqrt{5-3x}$ määramispiirkonna.

Lahendus. See funktsioon on määratud, kui ruutjuure alune avaldis on mittenegatiivne, s.t.

$$5-3x\geq 0.$$

Lahendame selle võrratuse:

$$5\geq 3x,$$

jagame kolmega, saame

$$\frac{5}{3}\geq x \quad \text{ehk} \quad x\leq \frac{5}{3}.$$

Seega määramispiirkond on $X=\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right]$.

Näide 3. Leiame funktsiooni $y=\ln(x+2)$ määramispiirkonna.

Lahendus. See funktsioon on määratud, kui logaritmitav avaldis on positiivne, s.t.

$$x + 2 > 0 \quad \text{ehk} \quad x > -2.$$

Seega määramispiirkond on $X = (-2; \infty)$.

Näide 4. Leiame funktsiooni $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin \frac{x+2}{3}$ määramispiirkonna.

Lahendus. Funktsioon $y = a^x \ (a > 0)$ on määratud x iga reaalarvulise väärtuse korral, ülesandes esinev funktsioon $2^{\frac{1}{x}}$ on määratud aga x niisuguste väärtuste korral, mille puhul saab arvutada avaldise $\frac{1}{x}$ väärtust, seega kui $x \neq 0$.

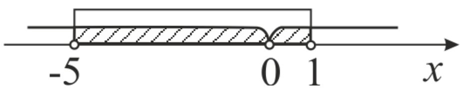
Teise liidetava $\arcsin \frac{x+2}{3}$ määramispiirkonna leiame kahekordsest võrratusest

$$-1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1.$$

Lahendame selle:

$$-1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1 \quad |\cdot 3$$
$$-3 \leq x + 2 \leq 3 \quad |-2$$
$$-5 \leq x \leq 1$$

Ülesandes antud funktsiooni $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin \frac{x+2}{3}$ määramispiirkond on mõlema liidetava määramispiirkonna ühisosa:



$$X = [-5; 0) \cup (0; 1].$$

Näide 5. Leiame funktsiooni $y = \frac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}} - 7\cos x$ määramispiirkonna.

Lahendus. Funktsioon $7\cos x$ on määratud x kõigi reaalarvuliste väärtuste korral, aga funktsioon $\frac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}}$ nende x väärtuste korral, mille puhul $2x - x^2 \neq 0$ ehk $x(2 - x) \neq 0$ ehk $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Seega määramispiirkond $X = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$.

Näide 6. Leiame funktsiooni $y = \log_3(-x) + \frac{1}{\sqrt{x - 7}}$ määramispiirkonna.

Lahendus. See funktsioon on määratud, kui esimeses liidetavas olev logaritmitav on positiivne ehk siis $-x>0$ või kui korrutame seda võrratust (-1)-ga ja muudame võrratuse märki

$$-x>0 \quad \Big|\cdot(-1),$$

siis saame

$$x<0.$$

Teine liidetav on murd, murru nimetajas oleva ruutjuure alune avaldis peab olema rangelt positiivne (ei saa olla võrdne nulliga):

$$x-7>0$$
$$x>7.$$

Ülesandes antud funktsiooni $y=\log_3(-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x-7}}$ määramispiirkond on mõlema liidetava määramispiirkonna ühisosa:

Jooniselt näeme, et ühisosa ei olegi, seega ülesandes antud avaldis ei määra funktsiooni.

Näide 7. Leiame funktsiooni $y=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{3}{x-2}-\log(x+1)$ määramispiirkonna.

Lahendus. Funktsiooni avaldis koosneb kolmest liidetavast, seetõttu leidub funktsioonil reaalarvuline väärtus siis, kui igal liidetaval on reaalarvuline väärtus. Viimasest asjaolust järelduvad tingimused, mis peavad üheaegselt täidetud olema:

1) kui juurija on paarisarv, siis juuritav peab olema mittenegatiivne;
2) murru nimetaja ei tohi võrduda nulliga;
3) logaritm leidub ainult positiivsetel arvudel.

Kirjutame vastavad tingimused välja ja lahendame võrratussüsteemi

$$\begin{cases} x^2-x-2\ge 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\ge 0 \Rightarrow x\le -1 \text{ või } x\ge 2 \\ x-2\ne 0 \Rightarrow x\ne 2 \\ x+1>0 \Rightarrow x>-1 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x\le -1 \text{ või } x\ge 2 \\ x\ne 2 \\ x>-1 \end{cases}$$

Kõik kolm tingimust on üheaegselt täidetud siis, kui $x>2$.

Vastus. Funktsiooni määramispiirkond on $X=(2\,;\,\infty)$.

Näide 8. Leiame funktsiooni $y=\sqrt{x^2-4x+3}+\arccos\dfrac{x-1}{x}$ määramispiirkonna.

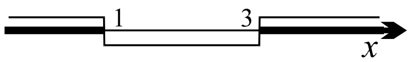
Lahendus. Funktsiooni määramispiirkonna annavad kolm tingimust, mis peavad üheaegselt täidetud olema:

1) kui juurija on paarisarv, siis juuritav peab olema mittenegatiivne;
2) arkuskoosinuse argumendi väärtused peavad olema lõigult $[-1;1]$;
3) murru nimetaja ei tohi võrduda nulliga.

Kirjutame need tingimused välja ja lahendame võrratussüsteemi.

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ -1\le \dfrac{x-1}{x}\le 1, \\ x\ne 0 \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-3)\ge 0, \\ \dfrac{x-1}{x}\le 1, \\ \dfrac{x-1}{x}\ge -1, \\ x\ne 0. \end{cases}$$

Süsteemi esimesest võrratusest saame, et (vt. kõrgema astme võrratuste või ruutvõrratuste lahendamist)



$X_1=(-\infty\,;1]\cup[3\,;\infty)$.

Süsteemi teisest võrratusest saame, et

$$\frac{x-1}{x}-1^{(x}\le 0,$$

$$\frac{x-1-x}{x}\le 0,$$

$$-\frac{1}{x}\le 0.$$

Viimane võrratus on rahuldatud, kui $x>0$.

Seega $X_2=(0\,;\infty)$.

Süsteemi kolmandast võrratusest saame, et

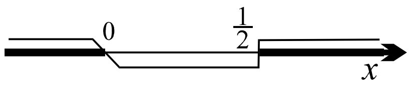
$$\frac{x-1}{x}+1^{(x}\ge 0,$$

$$\frac{x-1+x}{x}\ge 0,$$

$$\frac{2x-1}{x}\ge 0.$$

Tingimus $\frac{2x-1}{x} \geq 0$ on samaväärne tingimustega $x(2x-1) \geq 0$ ja $x \neq 0$.

Nullkohad on $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Joone tõmbamist alustame paremalt ja ülalt, sest pealiikme x^2 kordaja on positiivne (vt. kõrgema astme võrratuste või ruutvõrratuste lahendamist). Lugeja nullkoht $\frac{1}{2}$ on määramispiirkonda kaasa arvatud, nimetaja nullkoht 0 välja arvatud.



$X_3 = (-\infty\,;0) \cup \left[\frac{1}{2}\,;\infty\right).$

Funktsiooni määramispiirkonnaks X on piirkondade X_1, X_2 ja X_3 ühisosa.

Vastus. $X = \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \cup [3\,;\infty).$

Näide 9. Leiame funktsiooni $y = \sqrt{\log\left(x^2 - 4x + 4\right)}$ määramispiirkonna.

Lahendus. Juurfunktsiooni $y = \sqrt{x}$ korral $x \geq 0$, s. t. antud juhul

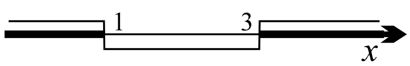
$$\log\left(x^2 - 4x + 4\right) \geq 0.$$

Kui logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$ alus $a > 1$, siis $\log_a x \geq 0$, kui $x \geq 1$.

Lahendame võrratuse:

$$x^2 - 4x + 4 \geq 1,$$
$$x^2 - 4x + 3 \geq 0\ .$$

Kanname nullkohad $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ x-teljele



ja saame võrratuse $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ lahendid ehk funktsiooni määramispiirkonna.

Vastus. $X = (-\infty\,;1] \cup [3\,;\infty).$

Näide 10. Leiame funktsiooni $y = \frac{\sqrt{3^x - 1}}{\log x}$ määramispiirkonna.

Lahendus. Astet 3^x saab arvutada iga reaalarvulise x korral. Murru lugejas ruutjuure all olev avaldis peab rahuldama tingimust $3^x - 1 \geq 0$. Logaritm leidub ainult positiivsetel arvudel. Murru nimetaja ei tohi võrduda nulliga. Kõiki neid tingimusi rahuldavad järgmise võrratussüsteemi lahendid:.

$$\begin{cases} 3^x - 1 \geq 0, \\ x > 0, \\ \log x \neq 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 3^x \geq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Lahendame esimene võrratuse $3^x \geq 1$ ehk $3^x \geq 3^0$ (teada on, et $3^0 = 1$).

Siin on astme alus 3 (arvust 1 suurem arv), järelikult sama võrratus kehtib ka astmete jaoks. Seega esimese võrratuse lahendid on $x \geq 0$. Saame tingimused

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Kõik kolm tingimust on üheaegselt täidetud siis, kui $0 < x < 1$ või $x > 1$.
Vastus. Määramispiirkond on $X = (0\,;1) \cup (1\,;\infty)$.

Ülesanded määramispiirkonna kohta

Ülesannetes $1. - 14.$ leidke funktsiooni määramispiirkond.

1. $y = x^3$.
Vastus. $X = (-\infty, \infty)$.

2. $y = \sqrt{x+1}$.
Vastus. $X = [-1, \infty)$.

3. $y = \dfrac{2}{x-2}$.
Vastus. $X = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

4. $y = \ln(3x-1)$.
Vastus. $X = \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$.

5. $y = 3^{4x-1}$.
Vastus. $X = (-\infty, \infty)$.

6. $y = 2^{\frac{1}{3x-2}}$.

Vastus. $X = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

7. $y = \cos(x+1)$.

Vastus. $X = (-\infty, \infty)$.

8. $y = \arcsin \frac{x}{2}$.

Vastus. $X = [-2, 2]$.

9. $y = \arccos(3x-1)$.

Vastus. $X = \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

10. $y = \frac{3}{2x-1} + \ln(2-x)$.

Vastus. $X = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

11. $y = \sqrt{x-2} + \log\left(\frac{1}{3} - x\right)$.

Vastus. Antud avaldis ei määra funktsiooni.

12. $y = \arctan(x-3)$

Vastus. $X = (-\infty, \infty)$.

13. $y = \arctan \frac{1}{x+1}$.

Vastus. $X = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

14. $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{5x+1} + \ln(x+2) - 3\sqrt{3-x}$.

Vastus. $X = \left(-2, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, 3\right]$.

15. $y = \arccos \frac{2x+1}{3} + \log(x+1)$.

Vastus. $X = (-1\ ;\ 1]$

16. $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \frac{3x-17}{x(x^2-9)}$.

Vastus. $X = (-\infty\ ;\ -3) \cup (-3\ ;\ -2] \cup (3\ ;\ \infty)$.

17. $y = \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{\log(x+1)}$.

Vastus. $X = (-1\,;\,0) \cup (0\,;\,\sqrt{2}]$.

18. $y = \sqrt{\log(x^2 - 6x + 6)}$.

Vastus. $X = (-\infty\,;\,1] \cup [5\,;\,\infty)$

Lineaarfunktsioon ja ruutfunktsioon

Lineaarfunktsiooni $y = kx + b$ graafik on **sirge**, mis lõikab *x*-telge punktis $\left(-\dfrac{b}{k}\ ;\ 0\right)$ ja *y*-telge punktis $(0\,;\,b)$. Sirge **tõus** on *k* ja **algordinaat** *b*.

Sirge **tõusunurk** on nurk sirge ja *x*-telje positiivse suuna vahel.

Sirge tõus võrdub selle sirge tõusunurga tangensiga. Seega, kui sirge tõus on *k* ja tõusunurk on α, siis

$$\boxed{k = \tan\alpha}\,.$$

Tõusuga *k* ja ühe punktiga $(x_1\,;\,y_1)$ määratud sirge võrrand on

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}\,.$$

Kahe punktiga $(x_1\,;\,y_1)$ ja $(x_2\,;\,y_2)$ määratud sirge võrrand on

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}\,.$$

Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik on **parabool**, mille asend koordinaatteljestikus sõltub kordajatest *a*, *b* ja *c*. Parabooli asendi määramiseks koordinaatteljestikus on vajalik ruutfunktsiooni avaldises eraldada *x* suhtes täisruut:

$$y = a(x + m)^2 + n, \text{ kus } m = \frac{b}{2a} \text{ ja } n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

On võimalik kontrollida, et

1) kui $a > 0$, siis parabool avaneb ülespoole, kui $a < 0$, siis avaneb allapoole;

2) $x + m = 0$ ehk $x = -m$ on parabooli sümmeetriatelje võrrand;

3) $H(-m\,;\,n)$ on parabooli haripunkt;

4) $A(0\,;\,c)$ on lõikepunkt *y*-teljega;

5) punktid $B(x_1\,;\,0)$, $C(x_2\,;\,0)$, kus x_1 ja x_2 on ruutfunktsiooni nullkohad, on lõikepunktid *x*-teljega.

Eespool toodud suurused määravad parabooli asendi koordinaatteljestikus. Kui uuritav probleem nõuab täpsemat funktsiooni graafikut, siis tuleb leida arvutuse teel lisaks veel mõned punktid paraboolil.

Näide 1. Joonestame funktsiooni $y = -2x^2 + 4x + 6$ graafiku ja uurime antud funktsiooni graafiku järgi.

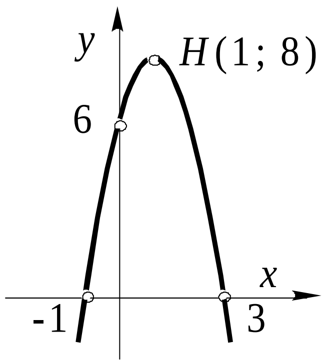
Lahendus. Eraldame ruutkolmliikmes $-2x^2 + 4x + 6$ täisruudu:

$$-2x^2 + 4x + 6 = -2(x^2 - 2x) + 6 = -2(x^2 - 2x + 1) + 2 + 6 = -2(x-1)^2 + 8.$$

Seega $y = -2(x-1)^2 + 8$, millest järeldub:

1) $a = -2 < 0$, parabool avaneb allapoole;
2) $x - 1 = 0$, $x = 1$ on parabooli sümmetriatelje võrrand;
3) $H(1\,;\,8)$ on haripunkt;
4) nullkohad:
$y = 0$, $-2x^2 + 4x + 6 = 0 \;\;|:(-2)$
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;
5) lõikepunkt y-teljega: (0 ; 6).

Joonestame antud funktsiooni graafiku.



Funktsiooni graafikult võime lugeda järgmist.

1) määramispiirkond (argumendi x nende väärtuste hulk, mille korral funktsiooni väärtus on määratud)
$X = R$;

2) muutumispiirkond (funktsiooni väärtuste hulk)
$Y = (-\infty\ ;\ 8]$;

3) positiivsuspiirkond (argumendi x väärtuste hulk määramispiirkonnast, mille korral funktsiooni väärtus on positiivne)
$X^{+} = (-1\ ;\ 3)$;

4) negatiivsuspiirkond (argumendi x väärtuste hulk määramispiirkonnast, mille korral funktsiooni väärtus on negatiivne)
$X^{-} = (-\infty\ ;\ -1) \cup (3\ ;\ \infty)$;

5) kasvamispiirkond (suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus)
$X \uparrow = (-\infty\ ;\ 1)$;

6) kahanemispiirkond (suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus)
$X \downarrow = (1\ ;\ \infty)$;

7) funktsiooni maksimum (argumendi väärtusest x=1 vasakul funktsioon kasvab ja paremal kahaneb)
$y_{\max} = y(1) = 8.$

Näide 2. Koostame sirge võrrandi, kui sirge on määratud punktiga (-1; 3) ja tõusunurgaga $135°$.

Lahendus. Sirgel on punkt (-1; 3), seega $x_1 = -1$, $y_1 = 3$.

Tõusunurk on $135°$. Siit saame sirge tõusu:

$$a = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1.$$

Koostame sirge võrrandi:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - (-1)) = -x - 1,$$

$$y = -x + 2\ .$$

Vastus. Sirge võrrand on $y = -x + 2$.

Näide 3. Koostame sirgete $2x-3y+1=0$, $2x+y-3=0$ lõikepunkti ja punkti (3; 2) läbiva sirge võrrandi.

Lahendus. Sirgete lõikepunkti koordinaadid on nende sirgete võrranditest moodustatud võrrandisüsteemi lahendid. Lahendame vastava võrrandisüsteemi.

$$-\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -4y+4=0 \qquad}$$
$$y=1$$
$$2x-3\cdot 1+1=0$$
$$x=1$$

Saime, et otsitaval sirgel on punkt (1; 1). Ülesandes on antud punkt (3; 2), mis asub ka sellel sirgel. Koostame neid punkte läbiva sirge võrrandi, kasutades eespool toodud kahe punktiga $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$ määratud sirge võrrandit

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Saame, et

$$\frac{y-1}{x-1}=\frac{2-1}{3-1},$$
$$\frac{y-1}{x-1}=\frac{1}{2},$$
$$y-1=\frac{1}{2}(x-1),$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Vastus. Sirge võrrand on $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Näide 4. Leiame parabooli $y=x^2-1$ lõikepunktid sirgega $x-\frac{1}{2}=-1$.

Lahendus. Kahe joone lõikepunktide koordinaadid on nende joonte võrranditest moodustatud võrrandisüsteemi lahendid.

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ x-\frac{1}{2}=-1 \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist $x=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ ja asendame esimesse võrrandisse:

$$y=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}.$$

Vastus. Lõikepunkt on $\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{4}\right)$.

Näide 5. Leiame parabooli $y=x^2-1$ lõikepunktid parabooliga $y=2x^2-5x+5$.

Lahendus. Koostame võrrandisüsteemi ja lahendame selle.

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=2x^2-5x+5 \end{cases}$$

$$x^2-1=2x^2-5x+5$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1=2\ ,\quad x_2=3\,,$$

$$y_1=2^2-1=3\ ,\ \ y_2=3^2-1=8\,.$$

Vastus. Lõikepunktid on (2; 3) ja (3; 8).

Ülesanded lineaarfunktsioonist ja ruutfunktsioonist

1. Koostage sirge võrrand, kui sirge on määratud punktiga (-5 ; -2) ja tõusuga -4.
Vastus. $y=-4x-22$.

2. Leidke sirge $2x-y=2$ lõikepunktid

1) sirgega $y=-x+6$;
2) parabooliga $y=x^2-2x+1$;
3) hüperbooliga $y=\frac{4}{x}$;
4) ringjoonega $x^2+y^2=8$.

Vastus.
1) $\left(2\frac{2}{3}\,;3\frac{1}{3}\right)$; 2) $(3\,;4)$, $(1\,;0)$; 3) $(2\,;2)$, $(-1\,;-4)$; 4) $(2\,;2)$, $(-0{,}4\,;-2{,}8)$.

Funktsiooni piirväärtus

Olgu funktsioon $y = f(x)$ määratud argumendi *x* väärtuse *a* mingis väikeses ümbruses. Piltlikult öeldes on arv *b* funktsiooni $y = f(x)$ **piirväärtuseks** kohal *a*, kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtused tulevad arvule *b* kuitahes lähedale, kui aga argumendi *x* väärtused on arvule *a* küllalt lähedal.

Kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ehk ka $f(x) \to b$, kui $x \to a$.

Näiteks $2x+1 \to 3$, kui $x \to 1$ või $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

$1-x^2 \to -3$, kui $x \to 2$ või $\lim\limits_{x\to -2}\left(1-x^2\right) = -3$.

Funktsiooni piirväärtuse omadused ja tähtsamad piirväärtused

Vaatleme juhtu, kus $x \to a$. Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, siis

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, kui $B \neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cA$, kus *c* on konstant.

Lisaks eelnevale

$$\lim_{x\to a} c = c, \text{ kus } c \text{ on konstant.}$$

Piirväärtuse omadused kehtivad ka juhul, kui $x \to \infty$.

Kui $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right| = \infty$, siis funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **lõpmata suureks** piirprotsessis $x \to a$. Kui aga $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, siis funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **lõpmata väikeseks** piirprotsessis $x \to a$.

Kui $u(x)$ on lõpmata väike, siis $\dfrac{1}{u(x)}$ on lõpmata suur.

Kui $u(x)$ on lõpmata suur, siis $\dfrac{1}{u(x)}$ on lõpmata väike.

Matemaatilise analüüsi **kaks tähtsat piirväärtust**:

$$\boxed{\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2{,}7182...}\ ,$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad \sin x \sim x,\ \text{kui } x\to 0}\ .$$

Funktsiooni nimetatakse **pidevaks kohal *a***, kui

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Funktsiooni pidevusest lühidalt: **pideva funktsiooni** graafikut saab joonistada pliiatsit paberilt eemaldamata. Iga elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas.

Näited funktsiooni piirväärtuse arvutamisest

Näide 1. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{4}$.

Lahendus. Kasutame ülaltoodud funktsiooni piirväärtuse omadusi.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2.$$

Näide 2. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x-1}{5x+2}$.

Lahendus. Kasutame piirväärtuse omadusi.

$$\lim_{x\to -2}\frac{4x-1}{5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(4x-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5x+2)}=\frac{4\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}1}{5\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}2}=\frac{4\cdot(-2)-1}{5\cdot(-2)+2}=\frac{-9}{-8}=\frac{9}{8}.$$

Näide 3. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$.

Lahendus. Kasutades funktsiooni piirväärtuse omadusi, saame, et

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2-1\right)}{\lim\limits_{x\to -1}\left(4x^2+5x+2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}4x^2+\lim\limits_{x\to -1}5x+\lim\limits_{x\to -1}2}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x-1}{4\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x+5\lim\limits_{x\to -1}x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot(-1)\cdot(-1)-1}{4\cdot(-1)\cdot(-1)+5\cdot(-1)+2}=\frac{3-1}{4-5+2}=\frac{2}{1}=2\,.$$

Näide 4. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1}$**.**

Lahendus.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-1\right)}=\frac{\sqrt{4}-1}{3^2-1}=\frac{2-1}{9-1}=\frac{1}{8}\,.$$

Näide 5. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

Lahendus. Leiame piirväärtused selle murru lugejas ja nimetajas olevatest funktsioonidest:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=4-4=0\,,$$

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=4-10+6=0\,.$$

Seega on tegemist nn. määramatusega tüüpi $\frac{0}{0}$. Piirväärtuse omaduse 3) põhjal ei saa funktsiooni piirväärtust kohe leida, sest see oleneb funktsiooni kogu avaldise muutumiskäigust. Kaotame selle määramatuse ära. Selleks lahutame lugejas ja nimetajas olevad hulkliikmed teguriteks ja taandame teguriga, mille piirväärtus lugejas ja nimetajas on null:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-2)}}(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}\,.$$

Selle murru lugeja ja nimetaja ei lähene nullile, kui $x\to 2$, seega saab nüüd piirväärtuse välja arvutada:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=-4\,.$$

Ja lõpuks saame kirjutada vastuse: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4$.

Näide 6. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$.

Lahendus. Siin on määramatus $\dfrac{0}{0}$. Lahutame lugejas ja nimetajas olevad hulkliikmed teguriteks ja taandame teguriga, mille piirväärtus lugejas ja nimetajas on null:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-1)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\underset{1}{\cancel{(x+3)}}}=\lim_{x\to -3}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x-1)}{\lim\limits_{x\to -3}(2x-1)}=\frac{-3-1}{-6-1}=\frac{4}{7}.$$

Näide 7. Lei Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Lahendus. Siin on samuti määramatus $\dfrac{0}{0}$, kui leida eraldi piirväärtused lugejas ja nimetajas olevatest funktsioonidest. Sellest määramatusest vabanemiseks viime lugejas oleva irratsionaalse avaldise $\sqrt{x+8}$ nimetajasse. Kasutame algebra abivalemit $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Meil on lugejas olemas tegur $a-b$, abivalemis oleva *a* asemel on meil $\sqrt{x+8}$ ja *b* asemel 3, kirjutame sellele kõrvale teguri $a+b$ ehk korrutame lugejat ja nimetajat ühe ja sama avaldisega, milleks on $\sqrt{x+8}+3$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

Näide 8. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Lahendus. Vt. eelmise näite lahenduskäiku.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{(x-1)-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{\overset{1}{\cancel{x-5}}}{\underset{1}{\cancel{(x-5)}}\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Näide 9. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}$.

Lahendus. Siin on ka määramatus $\frac{0}{0}$, kui leida eraldi piirväärtused lugejas ja nimetajas olevatest funktsioonidest. Sellest määramatusest vabanemiseks viime nimetajas oleva irratsionaalse avaldise $\sqrt{x-1}$ lugejasse. Kasutame algebra abivalemit $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Meil on nimetajas olemas tegur $a-b$, abivalemis oleva a asemel on meil 1 ja b asemel $\sqrt{x-1}$, kirjutame sellele kõrvale teguri $a+b$ ehk korrutame lugejat ja nimetajat ühe ja sama avaldisega, milleks on $1+\sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\left(1-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{1^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{1-(x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{1-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{2-x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{-(x-2)} =$$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\underset{1}{\cancel{x-2}}} = -(1+1) = -2.$$

Näide 10. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$.

Lahendus. Siin on murru lugejas ja nimetajas olevad funktsioonid lõpmata suured, kui x tõkestamatult kasvab $(x\to\infty)$, sellepärast on siin tegemist määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$. Kaotame selle määramatuse ära. Selleks jagame murru lugejat ja nimetajat x kõige kõrgema astmega, milleks praegu on x^2 ehk võtame lugejas ja nimetajas sulgude ette x^2 ja taandame:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\frac{\cancel{x^2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\cancel{x^2}_{1}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Kasutame funktsiooni piirväärtuse omadusi ja seda, et kui $x\to\infty$, siis $\frac{1}{x}\to 0$ (on lõpmata väike) ja ka $\frac{1}{x^2}\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{2+3\cdot 0}=-\frac{1}{2}.$$

Näide 11. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2-3x^3}{4x^3+2x^2-x+5}$.

Lahendus. Siin samuti tegemist määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$. Kaotame selle määramatuse ära. Selleks jagame murru lugejat ja nimetajat x kõige kõrgema astmega, milleks on x^3 ehk võtame lugejas ja nimetajas sulgude ette x^3 ja taandame. Siis kasutame funktsiooni piirväärtuse omadusi ja seda, et kui $x\to\infty$, siis $\frac{1}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$ ja $\frac{1}{x^3}\to 0$ (on lõpmata väikesed).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-3x^3}{4x^3+2x^2-x+5}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}^{1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-3\right)}{\cancel{x^3}_{1}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-3\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{0+0-3}{4+0-0+0}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}.$$

Näide 12. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+3x-1}{x^2-x+1}$.

Lahendus. Siin tegemist määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$. Määramatuse kaotamiseks jagame murru lugejat ja nimetajat *x* kõige kõrgema astmega, milleks on x^5 ehk võtame lugejas ja nimetajas sulgude ette x^5 ja taandame. Siis kasutame funktsiooni piirväärtuse omadusi ja seda, et kui $x \to \infty$, siis $\frac{1}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x^4} \to 0$, $\frac{1}{x^5} \to 0$ (on lõpmata väikesed). Seega funktsiooni avaldiseks oleva murru lugeja läheneb ühele ja nimetaja on lõpmata väike. Kasutame eespool toodud lauset, et kui $u(x)$ on lõpmata väike, siis $\frac{1}{u(x)}$ on lõpmata suur ja saame piirväärtuseks ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+3x-1}{x^2-x+1} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}^{1}\left(1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{\cancel{x^5}_{1}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \infty .$$

Näide 13. Leiame piirväärtuse $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^4-3x+2}$.

Lahendus. Siin on määramatus $\frac{\infty}{\infty}$. Selle kaotamiseks jagame murru lugejat ja nimetajat *x* kõige kõrgema astmega, milleks on x^4 ehk võtame lugejas ja nimetajas sulgude ette x^4 ja taandame. Siis kasutame funktsiooni piirväärtuse omadusi ja seda, et kui $x \to \infty$, siis $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x^4} \to 0$ (on lõpmata väikesed).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^4-3x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}_{1}\left(2-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{2-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0 .$$

Näide 14. Leiame piirväärtuse $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^4+2}$.

Lahendus. Selle piirväärtuse leidmiseks kasutame eespool toodud lauset, et kui $u(x)$ on lõpmata suur, siis $\frac{1}{u(x)}$ on lõpmata väike ja saame

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^4+2} = 0 .$$

Näide 15. Leiame piirväärtuse $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, kasutades selleks ühte tähtsat piirväärtust

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} .$$

Lahendus. Selle valemi kasutamiseks ülesandes antud piirväärtuse arvutamisel on vaja teha muutuja vahetus $t = 2x$, millest $x = \frac{t}{2}$. Kui $x \to 0$, siis ka $t \to 0$ ja saame kirjutada

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{2}} = 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 2\cdot 1 = 2$$

Näide 16. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Lahendus. Jagame piirväärtuse märgi all oleva murru lugeja ja nimetaja läbi x-ga:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}.$$

Nagu eelmises näites, tähistame siin $t = 5x$ ja $u = 3x$, millest $x = \frac{t}{5}$ ja $x = \frac{u}{3}$. Kui $x \to 0$, siis nii $t \to 0$ kui ka $u \to 0$ ja saame

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{5}}}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{u}{3}}} = \frac{5\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}} = \frac{5\cdot 1}{3\cdot 1} = \frac{5}{3}.$$

Näide 17. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}$.

Lahendus. Jagame piirväärtuse märgi all oleva murru lugeja ja nimetaja läbi x-ga:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}}{\frac{\sin 7x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}}.$$

Tähistame siin $t = 6x$ ja $u = 7x$, millest $x = \frac{t}{6}$ ja $x = \frac{u}{7}$. Kui $x \to 0$, siis nii $t \to 0$ kui ka $u \to 0$ ja saame

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{6}}}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{u}{7}}} = \frac{6\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{7\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}} = \frac{6\cdot 1}{7\cdot 1} = \frac{6}{7}.$$

Näide 18. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$, kasutades selleks teist tähtsat piirväärtust

$$\boxed{\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}\ .$$

Lahendus. Ülesandes on tegemist määramatusega 1^∞ (kui $x\to\infty$, siis $\dfrac{3}{x}\to 0$ ja $1+\dfrac{3}{x}\to 1$).

Piirväärtuse arvutamiseks teeme muutuja vahetuse $t=\dfrac{x}{3}$, millest $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{t}$ ja $x=3t$.
Kui $x\to\infty$, siis ka $t\to\infty$ ja saame (kasutades ka astme omadust, et astme astendamisel astendajad korrutatakse)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \underset{(1^\infty)}{=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^3 = e^3\ .$$

Näide 19. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^x$, kasutades piirväärtust $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Lahendus. Ülesandes on määramatus 1^∞ (kui $x\to\infty$, siis $\dfrac{x+4}{x-2}\to 1$, sest

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}},$$ aga $\dfrac{4}{x}\to 0$ ja $\dfrac{2}{x}\to 0$).

Jagame murru lugeja ja nimetaja läbi *x*-ga:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^x \underset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x}\ .$$

Teeme murru lugejas muutuja vahetuse $t = \dfrac{x}{4}$, millest $\dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{t}$ ja $x = 4t$. Kui $x \to \infty$, siis ka $t \to \infty$.

Murru nimetajas teeme muutuja vahetuse $u = \dfrac{x}{-2}$, millest $\dfrac{-2}{x} = \dfrac{1}{u}$ ja $x = -2u$. Kui $x \to \infty$, siis $u \to -\infty$. Saame

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{4} = e^{4}$$

ja

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{x} = \lim_{u\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2u} = \left[\lim_{u\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{-2} = e^{-2}$$

ning lõpuks

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{4}}{e^{-2}} = e^{4-(-2)} = e^{6}.$$

Näide 20. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{4x}$, kasutades piirväärtust $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Lahendus.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{4x} \underset{(1^{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}} = \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}\right]^{4}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{4}}.$$

Kasutame nii lugejas kui ka nimetajas olevate piirväärtuste arvutamiseks samasugust muutuja vahetuse võtet nagu eelmises näites ja saame

$$\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}\right]^{4}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{4}} = \frac{\left(e^{-3}\right)^{4}}{e^{4}} = e^{-3\cdot4-4} = e^{-16}.$$

Piirväärtuse arvutamise ülesanded

Arvutage järgmised piirväärtused.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+1\right)$.

Vastus. 9.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-1}{4x+2}$.

Vastus. $-\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+2\right)$.

Vastus. 1.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-1}{x^2+2x-3}$.

Vastus. ∞.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$

Vastus. $-\dfrac{1}{6}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2\left(x^2-1\right)}$.

Vastus. 0.

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+5x+6}$.

Vastus. –7.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Vastus. $\dfrac{1}{4}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

Vastus. $\dfrac{1}{4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{x^2-3x+1}$.

Vastus. 3

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - x^3 + 2x^2 - 1}{3 - 3x + 2x^4}$.

Vastus. $\dfrac{5}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{3x^3 + x^2 - 4x + 2}$.

Vastus. 0.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 4x^3 + 3}{x^2 - x^3}$.

Vastus. ∞.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x}$.

Vastus. $\dfrac{1}{2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}}$.

Vastus. $\dfrac{3}{2}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x$.

Vastus. e^{-2}.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^x$.

Vastus. e^8.

Funktsiooni tuletis

Funktsiooni $y = f(x)$ **tuletiseks** kohal *x* nimetatakse funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx suhte piirväärtust argumendi muudu lähenemisel nullile.

Funktsiooni tuletise tähised on y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Seega

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}\,.$$

Kuna funktsiooni muut $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, siis

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}\,.$$

Vahel peab ka eraldi juurde märkima, et tuletis on võetud kohal *x* ehk öeldakse “*x* järgi” ja kirjutatakse y'_x.

Funktsiooni tuletise võtmist nimetatakse ka **funktsiooni diferentseerimiseks**.

Funktsiooni tuletise definitsiooni saab kasutada mis tahes funktsiooni tuletise leidmiseks järgmise skeemi järgi:

1° avaldame $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$,

2° moodustame $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

3° leiame $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Näide. Leiame tuletise definitsiooni põhjal funktsiooni $y = \frac{1}{x^3}$ tuletise.

Lahendus.

1° $$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^3}{}^{(x^3} - \frac{1}{x^3}{}^{((x+\Delta x)^3} = \frac{x^3 - (x+\Delta x)^3}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$

$$= \frac{x^3 - \left(x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$

$$= \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3x^2 \cdot \Delta x - 3x \cdot (\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{x^3(x+\Delta x)^3} =$$

$$= \frac{\Delta x\left[-3x^2 - 3x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2\right]}{x^3(x+\Delta x)^3},$$

2° $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\cancel{\Delta x}\left[-3x^2-3x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2\right]}{\cancel{\Delta x}\cdot x^3(x+\Delta x)^3}=\dfrac{-3x^2-3x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{x^3(x+\Delta x)^3}$,

3° $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-3x^2-3x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{x^3(x+\Delta x)^3}=\dfrac{-3x^2}{x^3\cdot x^3}=-\dfrac{3}{x^4}$.

Seega kui $y=\dfrac{1}{x^3}$, siis $y'=-\dfrac{3}{x^4}$.

Funktsioonide **summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletise** leidmise reeglid on järgmised.

Kui $u=f(x)$ ja $v=g(x)$, siis

1) $\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$;

2) $\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}$;

3) $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$;

4) $\boxed{(c\cdot u)'=c\cdot u'}$, kus *c* on konstant.

Kui *c* on konstant, siis $\boxed{c'=0}$ (*konstandi tuletis on null*).

Liitfunktsiooni $y=f(u)$, milles $u=g(x)$, **tuletis** avaldub järgmiselt:

$$\boxed{y'=f'(u)\cdot g'(x)=f'_u(u)\cdot u'_x} \ .$$

Pöördfunktsiooni tuletis. Kui $x=g(y)$ on funktsiooni $y=f(x)$ pöördfunktsioon, siis

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)} \quad \text{ehk} \quad f'(x)=\frac{1}{g'\left[f(x)\right]}.$$

Tuletiste tabel

Lihtfunktsioon	Liitfunktsioon $f(u)$, milles $u=g(x)$
$x'=1$	
$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
$\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$
$\left(\cos x\right)'=-\sin x$	$\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
$\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\left(\cot x\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\left(\arccos x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^2}$	$\left(\arctan u\right)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Näited funktsiooni tuletise võtmise kohta

Näide 1. Leiame y', kui $y = 2x^3 + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x^2}$.

Lahendus. Esitame funktsiooni avaldise liikmed muutuja x astmetena

$$y = 2x^3 + 3\cdot x^{-4} - x^{-\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{1}{x} - x^{\frac{2}{3}}$$

ja diferentseerime liikmeti, kasutades tuletiste tabelit

$$y' = 2\cdot 3x^{3-1} + 3\cdot(-4)x^{-4-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} =$$
$$= 6x^2 - 12x^{-5} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$
$$= 6x^2 - \frac{12}{x^5} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \ .$$

Näide 2. Leiame y', kui $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$.

Lahendus. Kirjutame funktsiooni kujul

$$y = 9\cdot x^{-\frac{2}{3}} - 5\cdot 5^x .$$

Võtame tuletise, kasutades tuletiste tabelit ja tuletise võtmise reegleid.

$$y' = \left(9\cdot x^{-\frac{2}{3}} - 5\cdot 5^x\right)' = \left(9\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)' - \left(5\cdot 5^x\right)' = 9\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' - 5\cdot\left(5^x\right)' =$$
$$= 9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5\cdot 5^x \ln 5 = -6x^{-\frac{5}{3}} + 5^{x+1}\ln 5 .$$

Näide 3. Leiame y', kui $y = 3\cdot 2^x + \log_3 x$**.**

Lahendus. Diferentseerime tuletiste tabelit ja tuletise võtmise reegleid kasutades.

$$y' = 3\cdot\left(2^x\right)' + \left(\log_3 x\right)' = 3\cdot 2^x \ln 2 + \frac{1}{x\ln 3} \ .$$

Näide 4. Leiame y', kui $y=\left(x^4-x\right)\cdot\left(3\tan x-1\right)$.

Lahendus. Kasutame funktsioonide korrutise tuletise võtmise reeglit

$$\left(u\cdot v\right)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Praegu $u=x^4-x$ ja $v=3\tan x-1$ ning saame, et

$$y'=\left[\left(x^4-x\right)\cdot\left(3\tan x-1\right)\right]'=\left(x^4-x\right)'\left(3\tan x-1\right)+\left(x^4-x\right)\left(3\tan x-1\right)'=$$
$$=\left(4x^3-1\right)\left(3\tan x-1\right)+\left(x^4-x\right)\cdot\frac{3}{\cos^2 x}.$$

Näide 5. Leiame y', kui $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Lahendus. Kasutame funktsioonide jagatise tuletise võtmise reeglit

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Praegu $u=1+e^x$ ja $v=1-e^x$ ning saame, et

$$y'=\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)'=\frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2}=$$
$$=\frac{e^x\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x+\cancel{e^{2x}}}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

Näide 6. Leiame y', kui $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Lahendus. Funktsioonide jagatise diferentseerimise reegli põhjal saame

$$y'=\frac{\left(\cos x\right)'\left(1+\sin x\right)-\cos x\left(1+\sin x\right)'}{\left(1+\sin x\right)^2}=\frac{-\sin x\left(1+\sin x\right)-\cos x\cos x}{\left(1+\sin x\right)^2}=$$
$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{\left(1+\sin x\right)^2}=\frac{-\left(1+\sin x\right)}{\left(1+\sin x\right)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}.$$

Näide 7. Leiame y', kui $y=x^2e^x+\ln\sqrt{x}$.

Lahendus. Lihtsustame funktsiooni avaldises teist liiget (kasutame seost $\log_a b^n=n\log_a b$)

$$y=x^2e^x+\frac{1}{2}\ln x$$

ja diferentseerime, võttes esimesest liikmest tuletise kui korrutisest, ning saame

$$y' = \left(x^2\right)' e^x + x^2\left(e^x\right)' + \frac{1}{2}(\ln x)' = 2xe^x + x^2e^x + \frac{1}{2x} \ .$$

Näide 8. Leiame funktsiooni $y = 4x \cdot \cos x + \tan x$ tuletise kohal $x = \frac{\pi}{4}$.

Lahendus.

Avaldame y'.

$$y' = 4 \cdot (x)' \cdot \cos x + 4x \cdot (\cos x)' + (\tan x)' = 4\cos x - 4x\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Nüüd arvutame

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4} - \cancel{4}^1 \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}_1}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2.$$

Vastus. $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2$.

Näide 9. Leiame $f'(-5)$, kui $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$.

Lahendus. $f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x - 4)'(2x-1) - (3x^2 - 2x - 4)(2x-1)'}{(2x-1)^2} =$

$$= \frac{(6x-2)(2x-1) - (3x^2 - 2x - 4) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x + 10}{(2x-1)^2}.$$

Arvutame

$$f'(-5) = \frac{6 \cdot 25 + 6 \cdot 5 + 10}{(-2 \cdot 5 - 1)^2} = \frac{190}{121}.$$

Vastus. $f'(-5) = \frac{190}{121}$.

Näide 10. Leiame $f'(\frac{\pi}{4})$, kui $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

Lahendus. $f'(x)=\dfrac{(1+\cos x)'(1-\sin x)-(1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$

$$=\frac{-\sin x\cdot(1-\sin x)-(1+\cos x)\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

Kasutasime lihtsustamisel trigonomeetria valemit $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
Arvutame

$$f'(\frac{\pi}{4})=\frac{1-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{1}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\left(\frac{2}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{4}{4-4\sqrt{2}+2}=\frac{4}{2\left(3-2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3-2\sqrt{2}}=\frac{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}{9-4\cdot 2}=2(3+2\sqrt{2}).$$

Vastus. $f'(\frac{\pi}{4})=2(3+2\sqrt{2}).$

Näide 11. Leiame y', kui $y=\ln\sin x$.

Lahendus. Siin on tegemist liitfunktsiooniga $y=f(u)$, milles $u=g(x)$. Praegu $u=g(x)=\sin x$ ja $y=f(u)=\ln u$. Tuletiste tabelist

$$y'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$$

Näide 12. Leiame y', kui $y=\cos^2 x$.

Lahendus. Siin on tegemist liitfunktsiooniga. Kui $u=g(x)=\cos x$, siis $y=f(u)=u^2$ ja tuletiste tabelist

$$y'=2u\cdot u'=2\cos x\cdot(\cos x)'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

Näide 13. Leiame y', kui $y=\arctan^3\dfrac{1}{x}$.

Lahendus. Kui $u=g(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$, siis $y=f(u)=u^3$ ja

$$y'=3u^2\cdot u'=3\arctan^2\frac{1}{x}\cdot\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'.$$

Nüüd on vaja leida veel funktsiooni $\arctan\frac{1}{x}$ tuletis. See on omakorda liitfunktsioon, milles $u=\frac{1}{x}$ ja $f(u)=\arctan u$ ning

$$\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=(\arctan u)'_u\cdot u'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}_1}}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}_1}=-\frac{1}{x^2+1}$$

ja lõpuks

$$y'=3\arctan^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)=-\frac{3\arctan^2\frac{1}{x}}{x^2+1}.$$

Näide 14. Leiame y', kui $y=\left(2x^4+1\right)^{100}$.

Lahendus. Selles liitfunktsioonis olevat seesmist funktsiooni *u*-ga tähistamata saab kirjutada, et

$$y'=100\left(2x^4+1\right)^{100-1}\cdot\left(2x^4+1\right)'=$$
$$=100\left(2x^4+1\right)^{99}\cdot\left(2\cdot 4x^3+0\right)=$$
$$=100\left(2x^4+1\right)^{99}\cdot 8x^3.$$

Näide 15. Leiame y', kui $y=7^{x^2}$.

Lahendus. Liitfunktsioonis olevat eesmist funktsiooni *u*-ga tähistamata saab kirjutada, et

$$y'=7^{x^2}\ln 7\cdot\left(x^2\right)'=7^{x^2}\ln 7\cdot 2x.$$

Näide 16. $f(s)=\frac{\tan^2 s}{s^3+3}$, leiame tuletise, funktsiooni argumendiks on *s*.

$$f'(s)=\frac{2\tan s\cdot\frac{1}{\cos^2 s}\left(s^3+3\right)-\tan^2 s\cdot 3s^2}{\left(s^3+3\right)^2}.$$

Logaritmiline diferentseerimine. Näited

Funktsiooni $y=\left[u(x)\right]^{v(x)}$ tuletise võtmisel peab eelnevalt leidma sellest funktsioonist logaritmi (lihtne on võtta naturaallogaritm)

$$\ln y=\ln\left\{\left[u(x)\right]^{v(x)}\right\}=v(x)\cdot\ln\left[u(x)\right]$$

ja diferentseerima selle võrduse mõlemat poolt (võrduse vasaku poole tuletis on liitfunktsiooni tuletis ja parema poole tuletis on korrutise tuletis)

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'(x)\cdot\ln\left[u(x)\right]+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$$

ning siis avaldama y'.

Näide 1. Leiame y', kui $y=x^{\sin x}$.

Lahendus. Kõigepealt logaritmime võrduse mõlemat poolt.

$$\ln y=\ln x^{\sin x},$$
$$\ln y=\sin x\cdot\ln x.$$

Nüüd võtame tuletise võrduse mõlemast poolest (vasaku poole tuletis on liitfunktsiooni tuletis ja parema poole tuletis on korrutise tuletis).

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)'=$$
$$=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}.$$

Avaldame y'.

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$
$$=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Näide 2. Leiame y', kui $y=x^{x}$.

Lahendus. Logaritmime võrduse mõlemat poolt.

$$\ln y = \ln x^x,$$
$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Võtame tuletise võrduse mõlemast poolest.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' =$$
$$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Avaldame y'.

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Ilmutamata kujul antud funktsiooni tuletis. Näited

Olgu funktsioon $y = f(x)$, millel on olemas tuletis punktis x, antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$. Siis peab tuletise y' leidmiseks seda võrrandit diferentseerima, lugedes seejuures y argumendi x funktsiooniks, ja seejärel avaldama saadud võrrandist y'.

Näide 1. Leiame y', kui funktsioon y on antud ilmutamata kujul võrrandiga
$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y).$$

Lahendus. Diferentseerime võrrandi mõlemat poolt, lugedes y argumendi x funktsiooniks (paremal pool on liitfunktsioon).

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y) \cdot (1 - 2y').$$

Avaldame sellest võrdusest y'. Selleks avame võrduse paremal poolel sulud. Siis kirjutame y' sisaldavad liikmed võrduse vasakule poole ja ülejäänud liikmed paremale poole, toome y' sulgude ette ja lõpuks avaldame selle.

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 1 \cdot \cos(x - 2y) - 2y' \cdot \cos(x - 2y),$$
$$3y^2 \cdot y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2,$$
$$y'\left(3y^2 + 2\cos(x - 2y)\right) = \cos(x - 2y) - 3x^2,$$
$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}.$$

Näide 2. Leiame y', kui funktsioon y on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$x\sin y + y\sin x = 0.$$

Lahendus. Diferentseerime võrrandi mõlemat poolt, lugedes y argumendi x funktsiooniks (mõlemad liikmed on korrutised, seega võtame korrutise tuletist).

$$1\cdot\sin y + x\cdot\cos y\cdot y' + y'\cdot\sin x + y\cdot\cos x = 0.$$

Avaldame y'.

$$x\cos y\cdot y' + y'\cdot\sin x = -\sin y - y\cos x,$$

$$y'\left(x\cos y + \sin x\right) = -\left(\sin y + y\cos x\right),$$

$$y' = -\frac{\sin y + y\cos x}{x\cos y + \sin x}.$$

Ülesanded tuletise võtmise kohta

Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

1. $y = 3x^2 - 2x + 5$.

Vastus. $y' = 6x - 2$.

2. $y = \sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}$.

Vastus. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{18}{x^3}$.

3. $y = 2x^7 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - x\sqrt{x}$.

Vastus. $y' = 14x^6 + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} - \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

4. $y = x^2\left(\sqrt{x} + 3\right)$.

Vastus. $y' = x\left(\frac{5}{2}\sqrt{x} + 6\right)$.

5. $y = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$.

Vastus. $y' = 3x^2$.

6. $y = 5\cdot 2^x + 3\sin 1$.

Vastus. $y' = 5\cdot 2^x \ln 2$.

7. $y = -10\arctan x + 7 \cdot e^x$.

Vastus. $y' = -\dfrac{10}{1+x^2} + +7 \cdot e^x$.

8. $y = x^3 \log_2 x$.

Vastus. $y' = 3x^2 \log_2 x + \dfrac{x^2}{\ln 2}$.

9. $y = x^3 \cos x - 2\tan x - 5\log_3 x$.

Vastus. $y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x - \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{5}{x \ln 3}$.

10. $y = x^6 \ln x + 5e^x - 4 \cdot 3^x$.

Vastus. $y' = 6x^5 \ln x + x^5 + 5e^x - 4 \cdot 3^x \ln 3$.

11. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Vastus. $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

12. $y = \dfrac{2x - 5}{1 + 4x^3}$.

Vastus. $y' = \dfrac{2 + 60x^2 - 16x^3}{\left(1 + 4x^3\right)^2}$.

13. $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$.

Vastus. $y' = \dfrac{(x\cos x - \sin x)\left(\sin^2 x - x^2\right)}{x^2 \sin^2 x}$.

14. $y' = \dfrac{2a^2 x}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$.

Vastus. $y' = \dfrac{2a^2 x}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$.

15. $y = \cos 5x$.

Vastus. $y' = -5\sin 5x$.

16. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

Vastus. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

17. $y = \sin^9\left(\frac{x}{2}\right)$.

Vastus. $y' = \frac{9}{2}\sin^8\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

18. $y = 1 + \tan^2 3x$.

Vastus. $y' = 2\tan 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{6\tan 3x}{\cos^2 3x} = \frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

19. $y = x^{\ln x}$.

Vastus. $y' = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x} = 2x^{\ln x - 1}\ln x$.

20. Leidke y', kui funktsioon y on antud ilmutamata kujul võrrandiga $e^y = 1 - xy$.

Vastus. $y' = -\frac{y}{e^y + x}$.

Joone puutuja ja funktsiooni diferentsiaal

Funktsiooni tuletisel on järgmine geomeetriline tähendus:

funktsiooni $y = f(x)$ **tuletis võrdub funktsiooni graafiku puutuja tõusuga** punktis, mille abstsiss on *x*. Seega $k = f'(x)$.

Geomeetriast on teada, et tõusuga *k* ja ühe punktiga $(x_0\ ;\ y_0)$ määratud sirge võrrand on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Saame, et joonele $y = f(x)$ punktis $(x_0\ ;\ y_0)$ tõmmatud **puutuja võrrand** on

$$\boxed{y - y_0 = k_p(x - x_0)}\ ,$$

kus puutuja tõus $k_p = f'(x_0) = \tan\alpha$ **(nurk** α **on puutuja tõusunurk).**

Funktsioonil $y = f(x)$ tuletise $f'(x)$ ja argumendi muudu Δx korrutist nimetatakse funktsiooni **diferentsiaaliks** ja tähistatakse sümboliga dy:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Leiame funktsiooni $y = x$ diferentsiaali.

Tuletis $y' = (x)' = 1$ ja järelikult $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$ ehk $dx = \Delta x$. Seega, *sõltumatu muutuja x diferentsiaal dx ühtib tema muuduga* Δx. Seega saame funktsiooni diferentsiaali kirjutada kujul

$$\boxed{dy = f'(x)dx}.$$

Kui $\Delta x \to 0$ (argumendi muut Δx on väike), siis võib arvutamisel kasutada ligikaudset võrdust

$$\Delta y \approx dy$$

ehk

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Anname sellele kuju, mida sageli ligikaudsel arvutamisel kasutatakse:

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}.$$

Näide 1. Leiame joone $f(x) = e^x$ puutuja punktis, kus $x_0 = 0$.

Lahendus. Leiame kõigepealt puutupunkti teise koordinaadi y_0.

$$y_0 = f(x_0) = e^0 = 1.$$

Puutuja tõusu k_p leidmiseks leiame tuletise $f'(x) = e^x$ ja arvutame tuletise väärtuse punktis $x_0 = 0$.

$$k_p = f'(0) = e^0 = 1.$$

Saame puutuja võrrandi.

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0),$$
$$y - 1 = x,$$
$$y = x + 1.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = x + 1$.

Näide 2. Leiame joone $f(x) = x^2 + 1$ puutuja võrrand kohal $x_0 = 2$.

Lahendus. Et puutepunkt on joone ja puutuja ühine punkt, siis

$$y_0 = f(x_0) = 2^2 + 1 = 5$$

ning puutepunkt on koordinaatidega $(2\,;5)$.

Leiame funktsiooni tuletise $f'(x) = 2x$ ja selle väärtuse puutepunktis $f'(2) = 4$. Seega puutuja tõus $k = 4$. Asendades leitud suurused puutuja võrrandisse, saame

$$y-5=4(x-2) \text{ ehk } \quad y=4x-3.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y=4x-3$.

Näide 3. Leiame punktid, milles hüperbooli $f(x)=\frac{1}{x}$ puutuja on paralleelne sirgega $y=-\frac{1}{4}x+3$.

Lahendus. Olgu $(x_0\ ;\ y_0)$ punktid, milles hüperboolile tõmmatud puutujad on paralleelsed antud sirgega. Leiame sirge võrrandist selle sirge tõusu $k=-\frac{1}{4}$ (sirge võrrandis $y=kx+b$ on kordaja *k* sirge tõus). Et antud sirge ja otsitav puutuja on paralleelsed, siis on puutuja tõus k_p otsitavas punktis $(x_0\ ;\ y_0)$ samuti võrdne $-\frac{1}{4}$.
Saame, et

$$k_p=f'(x_0)=-\frac{1}{4}.$$

Leiame nüüd

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

Seostest $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ja $f'(x_0)=-\frac{1}{4}$ saame, et

$$-\frac{1}{x_0^{\ 2}}=-\frac{1}{4},$$

millest

$$x_0^{\ 2}=4, \quad x_0=\pm 2.$$

Arvutame ka puutepunktide teised koordinaadid $y_0=f(x_0)$.
Kui $x_0=+2$, siis $y_0=f(2)=\frac{1}{2}$ ja puutepunkt on $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$.
Kui $x_0=-2$, siis $y_0=f(-2)=-\frac{1}{2}$ ja puutepunkt on $\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Vastus. Punktid on $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Näide 4. Leiame parabooli $f(x)=3x-x^2$ puutuja, mis on paralleelne sirgega $y=5x-1$.

Lahendus. Paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed, seega on otsitava puutuja tõus 5 (sirge võrrandis $y=kx+b$ on kordaja *k* sirge tõus).

Teisalt $k=f'(x_0)$. Leiame $f'(x)=3-2x$ ja saame võrrandi

$$3-2x_0=5 \quad \Rightarrow \quad x_0=-1.$$

Puutepunkti ordinaadi leiame antud joone võrrandist.

$$y_0=f(x_0)=3\cdot(-1)-(-1)^2=-3-1=-4.$$

Seega on puutepunkt $(-1;-4)$ ja puutuja võrrand

$$y+4=5(x+1) \text{ ehk } \ y=5x+1.$$

Vastus. Puutuja võrrand on $y=5x+1$.

Näide 5. Leiame punkti, milles joonele $f(x)=2-x^2$ tõmmatud puutuja moodustab *y*-teljega nurga $135°$. Koostada selle puutuja võrrand.

Lahendus. Sirge tõusunurk on *x*-telje positiivse suuna ja sirge vaheline nurk. Et otsitav puutuja moodustaks *y*-teljega nurga $135°$, peab ta *x*-teljega moodustama nurga $45°$.

Puutuja tõus $k_p=f'(x_0)=\tan\alpha$.

Praegu $k_p=f'(x_0)=\tan 45°=1$.

Leiame $f'(x)=-2x$ ja koostame võrrandi puutepunkti $(x_0\,;\,y_0)$ abstsissi x_0 arvutamiseks ning lahendame selle.

$$-2x_0=\tan 45°,$$
$$-2x_0=1,$$
$$x_0=-\frac{1}{2}=-0{,}5.$$

Joone võrrandist puutepunkti ordinaat $y_0=f(x_0)=2-x_0^2$ ehk $y_0=2-(-0{,}5)^2=1{,}75$.

Saame puutuja võrrandi.

$$y-1{,}75=1\cdot(x-(-0{,}5)),$$

$$y-1{,}75=x+0{,}5,$$

$$y = x + 2{,}25.$$

Vastus. Punkt on (-0,5 ; 1,75) , puutuja võrrand on $y = x + 2{,}25$.

Näide 6. Tõestame, et joone $f(x) = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ puutujad punktides, kus $y_0 = 1$, lõikuvad punktis, mille abstsiss $x_0 = 0$.

Lahendus. Joonele $y = f(x)$ punktis $(x_0\,;\,y_0)$ tõmmatud puutuja võrrand on

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Leiame funktsiooni tuletise:

$$f'(x) = \frac{(1+3x^2)'(3+x^2) - (1+3x^2)(3+x^2)'}{(3+x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x(3+x^2) - (1+3x^2)2x}{(3+x^2)^2} = \frac{16x}{(3+x^2)^2}.$$

Ülesande tingimuste kohaselt on puutuja tõmmatud joonele punktis, kus $y_0 = 1$. Joone võrrandist leiame x_0 vastava väärtuse.

$$y_0 = \frac{1+3x_0^{\,2}}{3+x_0^{\,2}} \quad \text{ehk} \quad 1 = \frac{1+3x_0^{\,2}}{3+x_0^{\,2}}, \text{ millest saame, et } x_0 = \pm 1$$

ja

1) kui $x_0 = 1$, siis $f'(x_0) = \dfrac{16}{(3+1)^2} = 1$ ning puutuja võrrandiks punktis $(1;1)$ saame

$$y - 1 = 1 \cdot (x-1) \quad \Rightarrow \quad y = x;$$

2) kui $x_0 = -1$, siis $f'(x_0) = \dfrac{-16}{(3+1)^2} = -1$, seega puutuja võrrandiks punktis $(-1;-1)$ saame

$$y - 1 = -1 \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = -x.$$

Vastus. Sirged $y = x$ ja $y = -x$ lõikuvad koordinaatide alguspunktis, s.o. punktis, mille abstsiss on tõepoolest null.

Näide 7. Leiame funktsiooni $y = 3\sin x$ diferentsiaali dy.
Meil

$$y = f(x) = 3\sin x \text{ ja } f'(x) = 3\cos x.$$

Kuna

$$dy = f'(x)dx, \text{ siis } dy = 3\cos x\,dx.$$

Näide 8. Arvutame diferentsiaali abil ligikaudu $\sqrt{101}$.

Lahendus. Kasutame ligikaudse arvutamise valemit

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

Valime $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 100$, $\Delta x = 1$.
Arvutame $f(100) = \sqrt{100} = 10$.
Leiame $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ja arvutame $f'(100) = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Nüüd saame arvutada $\sqrt{101}$ ligikaudse väärtuse:

$$\sqrt{101} \approx 10 + 0{,}05 \cdot 1 = 10{,}05 .$$

Ülesanded joone puutuja ja diferentsiaali kohta

1. Leidke joone $y = 4x - x^2$ puutuja võrrand, kui puutepunkti abstsiss on $x_0 = 3$.
Vastus. Puutuja võrrand on $y = -2x + 9$.

2. Koostage puutuja võrrand joonele $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ punktides, kus see joon lõikab koordinaattelgi.
Vastus. Puutujate võrrandid on $y = -3x + 2$, $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

3. Leidke hüperbooli $y = -\dfrac{2}{x}$ puutujad, mis on parallelsed sirgega $y = x$.
Vastus. Puutujate võrrandid on $y = x + 2\sqrt{2}$, $y = x - 2\sqrt{2}$.

4. Leidke joone $y = (x-1)(x+2)$ puutujate võrrandid, kui puutepunkti ordinaat on $y_0 = -2$.
Vastus. Puutujate võrrandid on $y = x - 2$, $y = -x - 3$.

5. Leidke *dy*, kui $y = \cos^4 x$.

6. Arvutage diferentsiaali abil ligikaudu $2{,}05^{10}$.

7. Arvutage diferentsiaali abil ligikaudu $\sqrt[5]{1{,}03}$.

8. Arvutage diferentsiaali abil ligikaudu $\sqrt{63{,}8}$.

Funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid

Kui funktsioon $y = f(x)$ on antud ilma oma määramispiirkonnata *X*, tuleb see kõigepealt leida.

Funktsiooni $y = f(x)$ **kasvamispiirkonnaks (kahanemispiirkonnaks)** nimetatakse tema määramispiirkonna *X* seda osa, milles iga $x_1 < x_2$ korral funktsiooni väärtused rahuldavad tingimust $f(x_1) < f(x_2)$ (vastavalt kahanemisel $f(x_1) > f(x_2)$).

Funktsiooni $y = f(x)$ **kasvamispiirkonna** $X\uparrow$ moodustavad kõik need argumendi *x* väärtused, mis on võrratuse $\boxed{y' > 0}$ lahendid.

Funktsiooni $y = f(x)$ **kahanemispiirkonna** $X\downarrow$ moodustavad kõik need argumendi *x* väärtused, mis on võrratuse $\boxed{y' < 0}$ lahendid.

Funktsiooni graafiku punkte, milles funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks või vastupidi, nimetatakse **ekstreemumpunktideks** ja vastava punkti abstsissi väärtust x_e **ekstreemumkohaks** ning ordinaadi väärtust $y_e = f(x_e)$ **funktsiooni ekstreemumiks**.

Funktsiooni **ekstreemumi olemasolu tarvilikuks tingimuseks** on, et oletatav ekstreemumkoht on võrrandi $\boxed{f'(x) = 0}$ lahendiks. Funktsioonil võib olla ekstreemum ka nendel argumendi väärtustel, mille korral ***tuletis ei ole määratud***.

Kui $f'(x_0) = 0$ või $f'(x_0)$ ei ole määratud, siis kontrolliks, kas x_0 on ekstreemumkoht, kasutatakse **ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi**, mis on järgmised. Kui funktsiooni $y = f(x)$ **tuletis** üleminekul väärtusest $x = x_0$ (liikudes vasakult paremale) **muudab märki** plussilt miinusele (või vastupidi), siis x_0 on maksimumkoht (miinimumkoht), $f(x_0)$ on funktsiooni maksimum (miinimum) ja punkt $(x_0\,;\, f(x_0))$ funktsiooni graafiku maksimumpunkt (miinimumpunkt).

Kui **tuletis märki ei muuda**, siis funktsioonil ei ole sellel kohal ekstreemumit.

Funktsiooni ekstreemumkoha olemasolu ja liigi kindlakstegemisel võib kasutada ka teist tuletist $f''(x)$.

Kui x_0 on *maksimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) < 0.$$

Kui x_0 on *miinimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) > 0.$$

Kui osutub, et $f''(x_0) = 0$, siis peab ekstreemumkoha kindlakstegemiseks kasutama esimest tuletist y'.

Kui otsitakse funktsiooni **ekstreemumit mingil lõigul**, siis peab lisaks eespool märgitud argumendi väärtustele (võrrandi $f'(x)=0$ lahendid ja need argumendi väärtused, mille korral tuletis ei ole määratud) vaatlema ka *lõigu otspunkte*. Kõigi saadud argumendi väärtuste korral arvutatakse vastavad funktsiooni väärtused ja valitakse nende hulgast vastavalt vajadusele kas suurim või vähim.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y=x^3-12x+5$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid.

Lahendus. See funktsioon on määratud kogu reaalarvude hulgal.

Leiame tuletise:

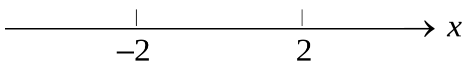
$$y'=3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2).$$

Funktsioon kasvab siis ja ainult siis, kui $y'>0$ ning kahaneb siis ja ainult siis, kui $y'<0$.

Tuletise märgi määramiseks leiame kõigepealt tuletise nullkohad, s.t. võrrandi $y'=0$ lahendid:

$$3(x-2)(x+2)=0, \text{ kui } \ x=2 \text{ või } x=-2.$$

Joonistame x-telje ja kanname sinna tuletise nullkohad.



Moodustame vahemikud, mida piiravad need tuletise nullkohad:

$$(-\infty,-2),\ (-2,2),\ (2,\infty).$$

Igas sellises vahemikus säilitab tuletis märki, s.t. on kas positiivne või negatiivne.

Anname esimesest vahemikust $(-\infty,-2)$ näiteks x-le väärtuse -3 ehk $x=-3$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal, milleks on

$$y'(-3)=3(-3)^2-12=3\cdot 9-12=18-12=6>0.$$

Selgub, et tuletis on sellel kohal positiivne, seega selles vahemikus funktsioon kasvab. Kanname vastava noole joonisele.

Teisest vahemikust $(-2,2)$ võtame $x=0$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal.

$$y'(0)=3\cdot 0-12=-12<0.$$

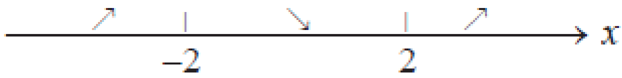
Tuletis on negatiivne, seega selles vahemikus funktsioon kahaneb. Kanname kahanemise vastava noolega joonisele.

Kolmandast vahemikust $(2, \infty)$ võtame $x = 3$ ja arvutame

$$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 27 - 12 = 15 > 0 .$$

Tuletis on positiivne, selles vahemikus funktsioon kasvab, joonistame noole joonisele.

Oleme kindlaks teinud kasvamis- ja kahenemispiirkonnad. Kanname eespool joonistatud kasvamis- ja kahanemispiirkondi märkivad nooled ühisele joonisele.



Sellest jooniselt saab määrata ka argumendi *x* väärtused, mille korral on funktsioonil ekstreemumid.

Argumendi *x* väärtusest -2 vasakul funktsioon kasvab ja paremal kahaneb, järelikul kohal $x = -2$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt maksimum ning vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\max}(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 5 = -8 + 24 + 5 = 21 .$$

Argumendi *x* väärtusest 2 vasakul funktsioon kahaneb ja paremal kasvab, järelikult kohal $x = 2$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt miinimum ning vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\min}(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 5 = 8 - 24 + 5 = -11 .$$

Vastus. $X \uparrow = (-\infty, -2)$, $X \downarrow = (-2, 2)$, $X \uparrow = (2, \infty)$, $y_{\max}(-2) = 21$, $y_{\min}(2) = -11$.

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = (x-3)\sqrt{x}$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid.

Lahendus. Selle funktsiooni avaldises on tegur $\sqrt{x}$, ruutjuurt saab võttat mittenegatiivsetest arvudest, seega peab olema $x \geq 0$. See tingimus annab määramispiirkonnaks hulga $X = [0, \infty)$.

Leiame tuletise (korrutise tuletise valemiga).

$$y' = 1\cdot\sqrt{x}^{\left(2\sqrt{x}\right.} + (x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}+x-3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

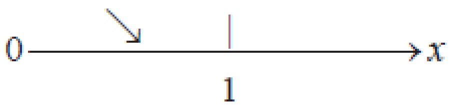
Nüüd leiame tuletise nullkoha, milleks on lugeja nullkoht $x-1=0$ ehk $x=1$. Leiame ka *x* väärtuse, mille puhul tuletist ei ole. See on praegu $x=0$, sest tuletise avaldises on nimetajas $\sqrt{x}$. Kui $x=0$, siis $\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$ ja tuletist ei saa arvutada.

Funktsiooni määramispiirkond, tuletise nullkoht $x=1$ ja koht $x=0$, kus tuletist ei ole, annavad kaks piirkonda, milles määrame tuletise märgi. Nendeks piirkondadeks on vahemikud $(0,1)$ ja $(1,\infty)$.

Anname vahemikust $(0,1)$ näiteks *x*-le väärtuse 0,5 ehk võtame $x=0,5$ ja arvutame tuletise väärtuse sellel kohal.

$$y'(0,5) = \frac{3(0,5-1)}{2\sqrt{0,5}} < 0.$$

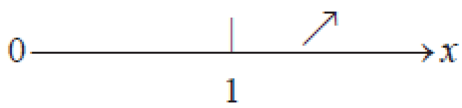
Selgub, et tuletis on sellel kohal negatiivne, seega vahemikus $(0,1)$ funktsioon kahaneb. Kanname vastava noole joonisele.



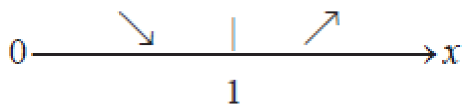
Võtame teisest vahemikust $(1,\infty)$ $x=2$ ja arvutame:

$$y'(2) = \frac{3(2-1)}{2\sqrt{0,5}} > 0.$$

Tuletis on positiivne, seega vahemikus $(1,\infty)$ funktsioon kasvab. Kanname noole joonisele.



Kanname eespool joonistatud kasvamis- ja kahanemispiirkondi märkivad nooled ühisele joonisele.



Näeme, et argumendi *x* väärtusest 1 vasakul funktsioon kahaneb ja paremal kasvab, järelikult kohal $x=1$ on funktsioonil ekstreemum ja nimelt miinimum. Vastav funktsiooni väärtus on

$$y_{\min}(1) = (1-3)\sqrt{1} = -2.$$

Vastus. $X\downarrow=(0,1)$, $X\uparrow=(1,\infty)$, $y_{\min}(1)=-2$.

Näide 3. Leiame funktsiooni $y=x^4-2x^2-3$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

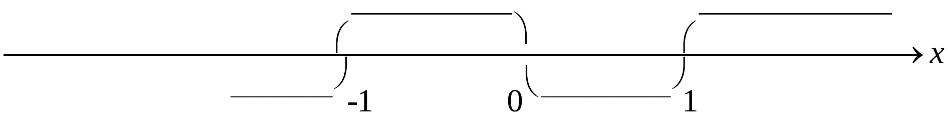
Lahendus. Leiame y':

$$y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$$

ja koostame võrratuse $y'>0$ ning lahendame selle.

$$4x\left(x^2-1\right)>0 \quad |:4 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2-1\right)>0\,.$$

Lahendame selle võrratuse nullkohtade meetodiga (vt. kõrgema astme võrratuste või ruutvõrratuste lahendamist).
Võrratuse vasaku poole nullkohad on $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Kanname leitud erinevad nullkohad arvsirgele ja joonistame funktsiooni y' märki määrava kõvera (pealiikme kordaja on positiivne!).



Jooniselt loeme võrratuse $y'>0$ lahendid (tuletise positiivsuspiirkonnad ehk funktsiooni kasvamispiirkonnad) on

$$X\uparrow=(-1\,;0) \text{ ja } X\uparrow=(1\,;\infty).$$

Et antud funktsiooni määramispiirkond on $X=(-\infty\,;\infty)$, siis määramispiirkonna selles osas, kus funktsioon ei kasva, ta kahaneb. Seega

$$X\downarrow=(-\infty\,;-1) \text{ ja } X\downarrow=(0\,;1).$$

Viimased piirkonnad saame välja lugeda ka jooniselt, kui $y'<0$.

Vastus. $X\uparrow=(-1\,;0)$ ja $X\uparrow=(1\,;\infty)$; $X\downarrow=(-\infty\,;-1)$ ja $X\downarrow=(0\,;1)$.

Näide 4. Leiame funktsiooni $y=x\ln x$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

Lahendus. Leiame y' (korrutise tuletise).

$$y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

Koostame ja lahendame võrratuse $y'>0$.

$$\ln x+1>0 \quad\Rightarrow\quad \ln x>-1 \quad\Rightarrow\quad \ln x>\ln\frac{1}{e}\ ,$$

millest järeldub, et $x > \frac{1}{e}$.

Seega kasvamispiirkond on $X\uparrow = \left(\frac{1}{e}\,;\,\infty\right)$.

Antud funktsiooni määramispiirkonna moodustavad kõik positiivsed reaalarvud (funktsiooni avaldises on $\ln x$, logaritmi saab võtta ainult positiivsetest arvudest) ehk $X = (0\,;\,\infty)$.
Määramispiirkonna selles osas, kus funktsioon ei kasva, ta kahaneb, seega kahanemispiirkond on

$$X\downarrow = \left(0\,;\,\frac{1}{e}\right).$$

Vastus. $X\uparrow = \left(\frac{1}{e}\,;\,\infty\right)$, $X\downarrow = \left(0\,;\,\frac{1}{e}\right)$.

Näide 5. Leiame funktsiooni $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ ekstreemumid.

Lahendus. Kasutame siin funktsiooni ekstreemumkoha olemasolu ja liigi kindlakstegemisel teist tuletist $f''(x)$.

Kui x_0 on *maksimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) < 0.$$

Kui x_0 on *miinimumkoht*, siis peavad olema täidetud tingimused

$$f'(x_0) = 0 \text{ ja } f''(x_0) > 0.$$

Leiame $f'(x)$ ja $f''(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2\ ,$$

$$f''(x) = 6x + 5\ .$$

Lahendame võrrandi $f'(x) = 0$.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 3\cdot 2}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}.$$

Oletatavad ekstreemumkohad on $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$.

Arvutame $f''\left(\frac{1}{3}\right)$ ja $f''(-2)$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\cdot\frac{1}{3} + 5 = 7 > 0$, järelikult $x = \frac{1}{3}$ on miinimumkoht;

$f''(-2) = -12 + 5 = -7 < 0$, järelikult $x = -2$ on maksimumkoht.

Vastus. Ekstreemumid on $f_{\min}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{35}{54}$, $f_{\max}(-2) = 7$.

Näide 6. Leiame funktsiooni $y = 2x^3 + x^2 - 20x + 10$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid.

Lahendus. Kuna ülesandes nõutakse kasvamis-, kahanemispiirkondade ja ekstreemumite leidmist, siis kasutame lahenduskäigus ainult esimest tuletist y'. Avaldame y'.

$$y' = 6x^2 + 2x - 20.$$

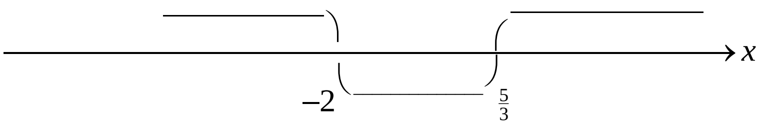
Leiame võrrandi $y' = 0$ lahendid.

$$6x^2 + 2x - 20 = 0 \quad |:2$$

$$3x^2 + x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 10}}{6} = \frac{-1 \pm 11}{6}.$$

Seega on esimese tuletise nullkohad $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Joonistame tuletisfunktsiooni y' märki määrava kõvera:



Jooniselt näeme, et üleminekul nullkohast $x = -2$ muudab tuletis märki plussilt miinusele, seega $x = -2$ on maksimumkoht ja funktsiooni maksimum on

$$y_{\max}(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 20 \cdot (-2) + 10 = 38.$$

Nullkoha $x = \frac{5}{3}$ ümbruses muutub tuletise märk miinuselt plussile, järelikult on $x = \frac{5}{3}$ miinimumkoht ja funktsiooni miinimum on

$$y_{\min}\left(\frac{5}{3}\right) = -11\frac{8}{27}.$$

Tuletisfunktsiooni positiivsuspiirkond (s.o. võrratuse $y' > 0$ lahendid) on funktsiooni kasvamispiirkonnaks, negatiivsuspiirkond (võrratuse $y' < 0$ lahendid) aga kahanemispiirkonnaks.

Seega jooniselt näeme, et $X\uparrow = (-\infty\,;-2)$, $X\uparrow = \left(\frac{5}{3}\,;\infty\right)$ ja $X\downarrow = \left(-2\,;\frac{5}{3}\right)$.

Vastus. $y_{\max}(-2) = 38$, $y_{\min}\left(\frac{5}{3}\right) = -11\frac{8}{27}$, $X\uparrow = (-\infty\,;-2)$, $X\uparrow = \left(\frac{5}{3}\,;\infty\right)$, $X\downarrow = \left(-2\,;\frac{5}{3}\right)$.

Ülesanded funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkondade ning ekstreemumite kohta

1. Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$;

b) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$;

c) $y = x^4 - 8x^2 + 2$.

Vastus.

a) $X \uparrow = (-\infty\,;-4)$, $X \uparrow = (2\,;\infty)$, $X \downarrow = (-4\,;2)$;

b) $X \uparrow = (-\infty\,;-3)$, $X \uparrow = (3\,;\infty)$, $X \downarrow = (-3\,;0)$, $X \downarrow = (0\,;3)$;

c) $X \uparrow = (-2\,;0)$, $X \uparrow = (2\,;\infty)$, $X \downarrow = (-\infty\,;-2)$, $X \downarrow = (0\,;2)$.

2. Leidke funktsiooni ekstreemumid.

a) $y = (x+2)^2(x-2)$;

b) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$;

c) $y = -x^4 + 2x^2$;

d) $y = \frac{x}{\ln x}$.

Vastus.

a) $y_{\min}(1) = -4$, $y_{\max}(-1) = 0$;

b) $y_{\min}(5) = -22$, $y_{\max}(1) = 10$;

c) $y_{\min}(0) = 0$, $y_{\max}(\pm 1) = 1$;

d) $y_{\min}(e) = e$.

3. Leidke funktsiooni $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ kasvamis- ja kahanemispiirkond ning ekstreemum.
Vastus. Funktsioon kasvab piirkonnas $-\infty < x < 1$, kahaneb piirkonnas $1 < x < \infty$, funktsiooni ekstreemum on $f_{\min}(1) = 3$.

4. Leidke funktsiooni $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid.

Vastus. Funktsioon kasvab piirkondades $-\infty < x < -\frac{2}{3}$ ja $2 < x < \infty$, kahaneb piirkonnas $-\frac{2}{3} < x < 2$, funktsiooni ekstreemumid on $f_{\max}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{256}{27}$, $f_{\min}(2) = 0$.

5. Leidke funktsiooni $f(x) = x\ln x$ kasvamis- ja kahanemispiirkond ning ekstreemum.

Vastus. Funktsioon kasvab piirkonnas $\frac{1}{e} < x < \infty$, kahaneb piirkonnas $0 < x < \frac{1}{e}$, funktsiooni ekstreemum on $f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

6. Leidke funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemum.

Vastus. Funktsioon kasvab piirkondades $0 < x < 1$ ja $1 < x < \infty$, kahaneb piirkondades $-\infty < x < -1$ ja $-1 < x < 0$, funktsiooni ekstreemum on $f_{\min}(0) = 1$.

Näited funktsiooni ekstreemumi rakendusest

Näide 1. Traadist, mille pikkus on 90 cm, on tarvis valmistada korrapärase kolmnurkse prisma mudel. Kui suur peab olema prisma põhiserv, et prisma külgpindala oleks suurim?

Lahendus. Olgu korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv *a* ja kõrgus *h*. Sellel prismal on 6 põhiserva ja 3 külgserva. Taadi pikkus on 90 cm, saame seose

$$6a + 3h = 90$$

ehk

$$2a + h = 30.$$

Prisma põhja ümbermõõt on $3a$ ja prisma külgpindala $S_k = 3ah$.

Seosest $2a + h = 30$ saame, et $h = 30 - 2a$. Asendame selle prisma külgpindala valemisse.

$$S_k = 3a(30 - 2a) = 90a - 6a^2.$$

Vaatleme külgpindala S_k kui funktsiooni, mille argumendiks on *a*. Antud ülesandes tuleb leida niisugune põhiserva *a* väärtus, mille korral S_k oleks maksimaalne. Avaldame S_k'.

$$S_k' = 90 - 6 \cdot 2a = 90 - 12a.$$

Lahendades võrrandi $S_k' = 0$, saame

$$90 - 12a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7{,}5.$$

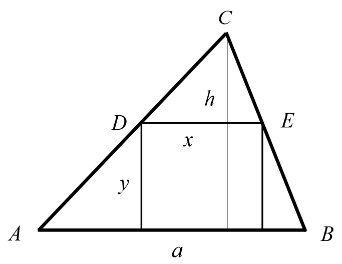
Uurime funktsiooni S_k teise tuletise märki.

Et $S_k'' = -12 < 0$, siis $a = 7{,}5$ on funktsiooni S_k maksimumkoht.

Vastus. Prisma külgpindala on suurim, kui põhiserv on 7,5 cm.

Näide 2. Kolmnurka, mille alus on *a* ja kõrgus on *h*, on joonestatud ristkülik nii, et selle külg asub kolmnurga alusel. Leiame ristküliku mõõtmed, kui tema pindala on maksimaalne.

Lahendus.



Tähistame ristküliku küljed tähtedega *x* ja *y*. Siis ristküliku pindala

$$S = xy.$$

Kolmnurgad ΔABC ja ΔDEC on sarnased kolmnurgad (vt. joonist), järelikult nende kolmnurkade aluste suhe võrdub kõrguste suhtega, seega

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-y},$$

millest avaldame *y*.

$$a(h-y) = hx,$$

$$ah - ay = hx,$$

$$ay = ah - hx,$$

$$y = \frac{ah - hx}{a} = h - \frac{h}{a}x.$$

Järelikult ristküliku pindala avaldub argumendi *x* funktsioonina järgmiselt:

$$S(x) = hx - \frac{h}{a}x^2.$$

Ristküliku pindala saab olla maksimaalne argumendi *x* nende väärtuste korral, mille puhul $S'(x)=0.$ Leiame funktsiooni tuletise ja tuletise nullkoha.

$$S'(x)=h-\frac{h}{a}\cdot 2x=h-\frac{2h}{a}x,$$

$$h-\frac{2h}{a}x=0,$$

$$h=\frac{2h}{a}x \,\Big|:h,$$

millest saame, et tuletise nullkoht on $x=\frac{a}{2}.$

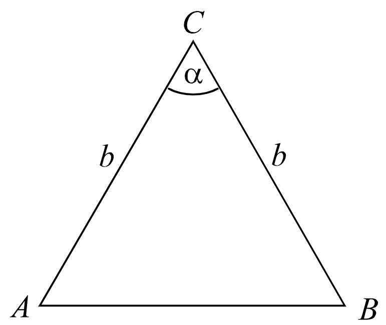
Funktsiooni $S(x)$ teine tuletis $S''(x)=-\frac{2h}{a}<0$, seega $x=\frac{a}{2}$ on selle funktsiooni maksimumkoht.

Leiame veel $y=h-\frac{h}{a}x=h-\frac{h}{\cancel{a}_1}\cdot\frac{\cancel{a}^1}{2}=h-\frac{h}{2}=\frac{h}{2}.$

Vastus. Ristküliku mõõtmed on $\frac{a}{2}$ ja $\frac{h}{2}$.

Näide 3. Võrdhaarse kolmnurga haar on *b*. Missuguse tipunurga korral on selle kolmnurga pindala maksimaalne?

Lahendus.



Kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse korrutisest, seega

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha.$$

Leiame viimasest tuletise nurga α järgi.

$$S'(\alpha) = \frac{1}{2}b^2 \cos\alpha.$$

Kolmnurga pindala on maksimaalne tipunurga α selle väärtuse korral, mille puhul $S'(\alpha) = 0$. Saame, et sel juhul peab $\cos\alpha = 0$ ehk $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Uurime funktsiooni $S(\alpha)$ teise tuletise märki.

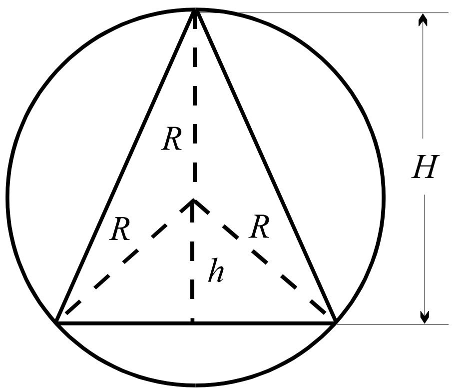
$$S''(\alpha) = -\frac{1}{2}b^2 \sin\alpha\ ,\ S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}b^2 < 0\,,$$

seega kohal $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on funktsioonil $S(\alpha)$ maksimum.

Vastus. Kolmnurga pindala on maksimaalne, kui tipunurk $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Näide 4. Leiame kerasse raadiusega R kujundatud suurima võimaliku ruumalaga koonuse kõrguse.

Lahendus.



Joonisel on kujutatud läbilõige sellest kehast.

Koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$ kus r on koonuse põhja raadius ja H on koonuse kõrgus.

$$h = H - R \text{ (vt. joonist).}$$

Pythagorase teoreemi kohaselt

$$r^2 = R^2 - h^2 = R^2 - (H-R)^2 =$$
$$= R^2 - \left(H^2 - 2RH + R^2\right) = 2RH - H^2\,.$$

Asendame saadud r^2 avaldise koonuse ruumala $V=\frac{1}{3}\pi\, r^2 H$ avaldisse ja saame, et

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)H=\frac{2}{3}\pi RH^2-\frac{1}{3}\pi H^3.$$

Leiame sellest tuletise kõrguse *H* järgi:

$$V'(H)=\frac{2}{3}\pi\, R\cdot 2H-\frac{1}{3}\pi\cdot 3H^2=$$
$$=\frac{4}{3}\pi\, RH-\pi\, H^2=\pi\, H(\frac{4}{3}R-H),$$

millest $V'\left(H\right)=0$, kui $\frac{4}{3}R-H=0$ ehk $H=\frac{4}{3}R.$

Uurime funktsiooni $V(H)$ teise tuletise märki.

$$V''\left(H\right)=\frac{4}{3}\pi R-\pi\cdot 2H=\frac{4}{3}\pi R-2\pi H$$

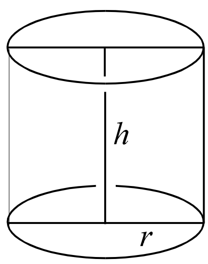
ja

$$V''\left(\frac{4}{3}R\right)=\frac{4}{3}\pi R-2\pi\cdot\frac{4}{3}R=\frac{4}{3}\pi R-\frac{8}{3}\pi R=-\frac{4}{3}\pi R<0.$$

Vastus. Suurima ruumalaga koonuse kõrgus on $\frac{4}{3}R.$

Näide 5. Silindri ruumala on *V*. Leiame sellise seose silindri raadiuse *r* ja kõrguse *h* vahel, mille korral selle silindri täispindala on vähim.

Lahendus.



Silindri ruumala on $V=\pi r^2 h,$ millest $h=\frac{V}{\pi r^2}.$

Silindri täispindala on

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V\frac{1}{r}.$$

Leiame viimasest tuletise põhja raadiuse *r* järgi.

$$S'(r) = 4\pi r + 2V \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 2 \cdot \frac{2\pi r^3 - V}{r^2}.$$

Saadud tuletis on võrdne nulliga, kui murru lugeja $2\pi r^3 - V = 0$ ehk $V = 2\pi r^3$.

Asendades selle võrdusesse $h = \frac{V}{\pi r^2}$, saame, et $h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$.

Vastus. Seos silindri kõrguse ja põhja raadiuse vahel on $h = 2r$.

Ülesanded funktsiooni ekstreemumi rakenduse kohta

1. Leidke parabooli $y = 2x^2 + 8x - 2$ haripunkti koordinaadid.
Vastus. $(-2\,;-10)$.

2. Leidke kerasse kujundatud maksimaalse ruumalaga silindri kõrgus, kui kera raadius on R.
Vastus. Kõrgus on $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

3. Peab valmistama pealt lahtise risttahukakujulise paagi, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on 500 liitrit. Millised peavad olema paagi mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

Vastus. Paagi põhiserv peab olema 10 cm ja kõrgus 5 cm.

Algfunktsioon ja määramata integraal

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsiooniks** lõigul $[a, b]$, kui selle lõigu kõikides punktides kehtib võrdus $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

Näide. Funktsioon $\frac{x^4}{4}$ on funktsiooni x^3 algfunktsioon, sest

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 .$$

Kui $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid lõigul $[a, b]$, siis

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 .$$

Tingimusest

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = 0$$

järeldub aga, et

$$F_1(x) - F_2(x) = C ,$$

s.t. funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid erinevad üksteisest lõigul $[a, b]$ ülimalt konstantse liidetava C võrra. Seega, teades funktsiooni $f(x)$ üht algfunktsiooni $F(x)$, võime funktsiooni $f(x)$ iga algfunktsiooni avaldada kujul $F(x) + C$.

Avaldist kujul $F(x) + C$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja C on suvaline konstant (*integreerimiskonstant*), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse

$$\int f(x)dx ,$$

s.t.

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Kui funktsioonil $f(x)$ leidub lõigul $[a, b]$ algfunktsioon, siis öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ eksisteerib määramata integraal (lõigul $[a, b]$).

Põhilised määramata integraalid

Järgmiste võrduste õigsust saab kontrollida diferentseerimise teel, veendudes, et võrduste paremate poolte tuletised on võrdsed integraalialuste funktsioonidega.

Järgnevates valemites mõistetakse C all suvalist konstanti.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.
7. $\int e^x dx = e^x + C$.
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Määramata integraali omadusi

1. $\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

2. Kui a on konstant, siis
   $\int a\, f(x) dx = a \int f(x) dx$.

Määramata integraali arvutamisel on kasulikud järgmised reeglid.

Kui $\int f(x) dx = F(x) + C$, siis

1) $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$;

2) $\int f(x+b) dx = F(x+b) + C$;

3) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Näited põhiliste määramata integraalide ja määramata integraali omaduste kohta

Näide 1.

$$\int\left(3x^4dx-2\sin x+4\sqrt[3]{x}\right)dx=3\int x^4dx-2\int\sin x dx+4\int x^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$=3\frac{x^{4+1}}{4+1}-2\left(-\cos x\right)+4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{5}x^5+2\cos x+3x\sqrt[3]{x}+C\,.$$

Näide 2.

$$\int\left(3e^x-\frac{7}{x}-x^{\frac{1}{8}}\right)dx=3\int e^xdx-7\int\frac{1}{x}dx-\int x^{\frac{1}{8}}dx=3e^x-7\ln|x|-\frac{x^{\frac{1}{8}+1}}{\frac{1}{8}+1}+C\,.$$

Näide 3.

$$\int\left(\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{2\cos^2 x}+3\right)dx=\frac{1}{4}\int\sin x\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+3\int dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{2}\tan x+3x+C\,.$$

Näide 4.

$$\int\cos 6x dx=\frac{1}{6}\sin 6x+C\,.$$

Näide 5.

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C\,.$$

Näide 6.

$$\int e^{2x-3}dx=\frac{1}{2}e^{2x-3}+C\,.$$

Näited muutuja vahetusest määramata integraalis

Näide 1.

$$\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\arcsin^2 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=I\,.$$

Integraal I on kujul $\int g\left[f(x)\right]\cdot f'(x)dx$.

Võtame uueks muutujaks $t=\arcsin x$, sel juhul $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ja saame

$$I=\int t^2dt=\frac{t^{2+1}}{2+1}+C=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\arcsin^3 x}{3}+C.$$

Näide 2.

$$\int\frac{\ln^4 x}{x}dx=\int\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}dx=I.$$

Integraal I on kujul $\int g\left[f(x)\right]\cdot f'(x)dx$.

Võtame uueks muutujaks $t=\ln x$, sel juhul $dt=\frac{1}{x}dx$ ja saame

$$I=\int t^4dt=\frac{t^{4+1}}{4+1}+C=\frac{t^5}{5}+C=\frac{\ln^5 x}{5}+C.$$

Näide 3.

$$\int\arctan^6 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=I.$$

Teeme muutuja vahetuse $u=\arctan x$, siis $du=\frac{1}{1+x^2}dx$.

Saame

$$I=\int u^6du=\frac{u^7}{7}+C=\frac{\arctan^7 x}{7}+C.$$

Näide 4.

$$\int\cos^3 x\sin x\,dx=I$$

Teeme muutuja vahetuse $u=\cos x$, siis $du=-\sin x\,dx$ ja $-du=\sin x\,dx$.

Saame

$$I=-\int u^3du=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{\cos^4 x}{4}+C.$$

Näide 5.

$$\int x^3\sin\left(x^4\right)dx=I.$$

Leiame siinuse argumendi x^4 tuletise: $\left(x^4\right)'=4x^3$.

Tõstame integreeritavas funktsioonis teguri x^3 tahapoole ja korrutame ning jagame 4-ga, et integreeritavas funktsioonis oleks x^4 tuletis.

$$I = \int x^3 \sin\left(x^4\right) dx = \frac{1}{4}\int \sin\left(x^4\right) \cdot 4x^3 dx .$$

Seega integraal I on kujul $\int g\left[f(x)\right] \cdot f'(x) dx$.

Võtame uueks muutujaks $t = x^4$, sel juhul $dt = 4x^3 dx$ ja saame

$$I = \int x^3 \sin\left(x^4\right) dx = \frac{1}{4}\int \sin\left(x^4\right) \cdot 4x^3 dx = \frac{1}{4}\int \sin t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos\left(x^4\right) + C.$$

Näide 6.

$$\int \frac{dx}{x^3 - 8} = I$$

Lahutame $x^3 - 8$ teguriteks: $x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$.

Nüüd lahutame integreeritava funktsiooni osamurdudeks:

$$\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} = \frac{A\left(x^2 + 2x + 4\right) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)} .$$

Leiame kordajad A, B ja C.

$$1 = A\left(x^2 + 2x + 4\right) + (Bx + C)(x-2)$$

Kui $x = 2$, siis saame, et $1 = A(4+4+4)$, millest $A = \frac{1}{12}$.

Kahes järgmises reas on võrduma pandud x^2 ja x^0 (mis tähendab ka vabaliiget) kordajad vasakul ja paremal pool võrdusmärki.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B, \quad B = -A, \quad B = -\frac{1}{12} \\ x^0 & 1 = 4A - 2C, \quad 2C = 4A - 1, \quad C = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-\frac{1}{12}x - \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx - \frac{1}{24}\int \frac{6}{x^2+2x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4} - \frac{1}{24}\cdot 6\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)+3} =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ositi integreerimine

Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid mingis piirkonnas X. Sel juhul ka korrutis uv on diferentseeruv piirkonnas X, kusjuures

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Seda integreerides saame:

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

millest

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}.$$

Viimast valemit nimetatakse **ositi integreerimise valemiks**. See valem võimaldab komplitseeritud integraali leidmist taandada lihtsama integraali leidmisele.

Näide 1.

$$\int x^2 \sin x\, dx = I.$$

Rakendame selle integraali võtmisel kaks korda ositi integreerimise valemit

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Esimene kord

$$u = x^2,$$
$$dv = \sin x dx,$$
$$du = 2x dx,$$
$$v = -\cos x.$$

Saame

$$I = \int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) \cdot 2x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx.$$

Saadud tulemuses oleva integraali võtame jälle ositi, kusjuures

$$u = x,$$
$$dv = \cos x dx,$$
$$du = dx,$$
$$v = \sin x.$$

Seega

$$I = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx\right] =$$
$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - (-\cos x)\right] + C = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Näide 2.

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Rakendame selle integraali võtmisel kaks korda ositi integreerimise valemit

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ja lõpuks avaldame otsitava integraali.

$$\int e^x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^x, \\ dv = \cos x\, dx, \\ du = e^x dx, \\ v = \sin x. \end{bmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^x, \\ dv = \sin x\, dx, \\ du = e^x dx, \\ v = -\cos x. \end{bmatrix} =$$
$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int e^x (-\cos x)\, dx\right) = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right) =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Viime integraali $\int e^x \cos x\, dx$ võrduse paremalt poolelt võrduse vasakule poolele ja saame

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = 2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

ning sellest

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + C.$$

Määramata integraalide avaldamise ülesanded

Avaldada järgmised integraalid.

1. $\int x^{10} dx$. Vastus: $\frac{x^{11}}{11} + C$.

2. $\int \sqrt[4]{x} dx$. Vastus: $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$.

3. $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$. Vastus: $\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

4. $\int \frac{x^4 + x^2 - 6x}{x^3} dx$. Vastus: $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{6}{x} + C$.

5. $\int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4\cos x\right) dx$. Vastus: $\frac{7^x}{\ln 7} - 8\ln|x| + 4\sin x + C$.

6. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{e^x}{4}\right) dx$. Vastus: $2\arctan x + \frac{e^x}{4} + C$.

7. $\int \left(\sin x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{\cos^2 x}\right) dx$. Vastus: $-\cos x - 3\arcsin x - 5\tan x + C$.

8. $\int \cos 4x dx$. Vastus: $\frac{1}{4}\sin 4x + C$.

9. $\int \left(2x+1\right)^2 dx$. Vastus: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(2x+1\right)^3}{3} + C$.

10. $\int \frac{dx}{9x+7}$. Vastus: $\frac{1}{9}\ln\left(9x+7\right) + C$.

11. $\int 3^{2-11x} dx$. Vastus: $\frac{1}{-11} \cdot \frac{3^{2-11x}}{\ln 3} + C$.

12. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$, võttes uueks muutujaks $t = \sin x$. Vastus: $\frac{\sin^4 x}{x} + C$.

13. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$, võttes uueks muutujaks $t = x^3$. Vastus: $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

14. $\int \frac{\sin x}{\cos x + 1} dx$, võttes uueks muutujaks $t = \cos x + 1$. Vastus: $-\ln|\cos x + 1| + C$.

15. $\int x \cos x dx$, kasutades ositi integreerimise võtet. Vastus: $x \sin x + \cos x + C$.

16. $\int x^2 \ln x dx$, kasutades ositi integreerimise võtet. Vastus: $\frac{x^3}{9}\left(3\ln x - 1\right) + C$.

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

18. $\int 3^{x^2} x dx$.

19. $\int e^{x^2+4x+3}\left(x+2\right) dx$.

20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

21. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$.

22. $\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$.

23. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

24. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$.

25. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Määratud integraal

Olgu antud lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon $y = f(x)$. Tähistame tema vähima väärtuse sellel lõigul tähega *m* ja suurima väärtuse sellel lõigul tähega *M*. Jaotame lõigu $[a, b]$ osadeks punktidega

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b,$$

kusjuures

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n .$$

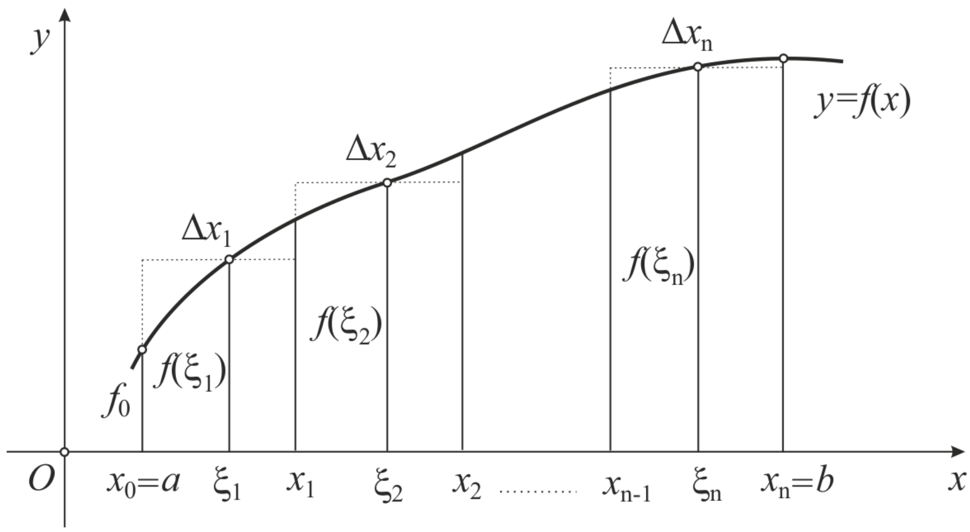
Tähistame:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1 , \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2 , ..., x_n - x_{n-1} = \Delta x_n .$$

Võtame igal lõigul $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ ühe punkti, mida tähistame vastavalt $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$:

$$x_0 < \xi_1 < x_1 , \quad x_1 < \xi_2 < x_2 \quad , \; ... \; , \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n .$$

Kanname ülaltoodu järgmisele joonisele.



Arvutame funktsiooni $f(x)$ väärtused $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ ja moodustame summa

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (1)$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **integraalsummaks** lõigul $[a, b]$.

Tähistame lõikudest $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ pikimat $\max[x_{i-1}, x_i]$. Vaatleme lõigu $[a, b]$ selliseid jaotusi lõikudeks $[x_{i-1}, x_i]$, et $\max[x_{i-1}, x_i] \to 0$. Lõikude arv *n* läheneb seejuures lõpmatusele ehk $\max \Delta x_i \to 0$, kui $n \to \infty$.

Kui lõigu $[a, b]$ mistahes jaotuse korral, kus $\max \Delta x_i \to 0$, ja ξ_i mistahes valiku korral lõigult $[x_{i-1}, x_i]$ integraalsumma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

läheneb ühele ja samale piirväärtusele, siis piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määratud integraaliks** lõigul $[a, b]$ ja tähistatakse sümboliga

$$\int_a^b f(x)dx .$$

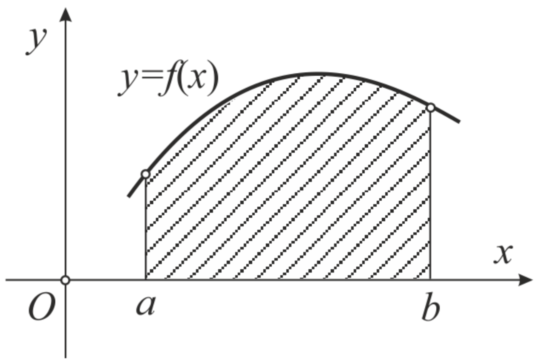
Seega

$$\boxed{\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx} .$$

Arvu *a* nimetatakse integraali **alumiseks rajaks** ja arvu *b* **ülemiseks rajaks**. Lõiku $[a, b]$ nimetatakse *integreerimispiirkonnaks*, suurust *x* *integreerimismuutujaks* ja funktsiooni $f(x)$ *integreeritavaks funktsiooniks*.

Kui joonestada integraalialuse funktsoiooni $y = f(x)$ graafik, siis $f(x) \geq 0$ korral on integraal $\int_a^b f(x)dx$ arvuliselt võrdne joone $f(x)$, sirgete $x = a$ ja $x = b$ ning *x*-teljega piiratud kujndi, nn. *kõvertrapetsi* pindalaga.

$$\boxed{S_{kõvertrapets} = \int_a^b f(x)dx}.$$



Määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ mõiste andmisel oli eelduseks, et $a < b$. Kui $b < a$, siis

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}.$$

Kui $a = b$, siis kehtib võrdus

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}.$$

Määratud integraali omadusi

Konstantse teguri võib tuua integraali märgi ette. Kui $A = const$, siis

$$\boxed{\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx}.$$

Algebralise summa määratud integraal on võrdne liidetavate integraalide algebralise summaga. Kahe liidetava korral

$$\boxed{\int_a^b \left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx}\,.$$

Iga kolme arvu *a*, *b*, *c* korral kehtib võrdus

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx}$$

vaid siis, kui kõik kolm integraali eksisteerivad.

Määratud integraali arvutusvalem

Kui $F(x)$ on pideva funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon, siis kehtib valem

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}\,.$$

Seda valemit nimetatakse **Newton-Leibnizi valemiks**.

Näide 1. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_1^2 \left(x^2+3x-1\right)dx=\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}-x\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{8}{3}+3\cdot\frac{4}{2}-2-\left(\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}-1\right)=\frac{35}{6}.$$

Näide 2. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\pi\int_0^1 \left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^5}{5}-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^5}{5}\right)\right)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}.$$

Näide 3. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_0^4 3e^x dx = 3e^x \Big|_0^4 = 3\left(e^4 - e^0\right) = 3\left(e^4 - 1\right).$$

Näide 4. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_2^3 \frac{5}{x} dx = 5\int_2^3 \frac{1}{x} dx = 5 \cdot \ln|x| \Big|_2^3 = 5(\ln 3 - \ln 2) = 5\ln\frac{3}{2}.$$

Näide 5. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 4\arctan x \Big|_0^1 =$$

$$= 4(\arctan 1 - \arctan 0) = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi.$$

Näide 6. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin x dx = \frac{1}{2}(-\cos x) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Näide 7. Arvutame järgmise määratud integraali väärtuse.

$$\int_{-1}^1 \frac{2 \cdot 3^x - 2 \cdot 9^x}{3^x} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2 \cdot 3^x}{3^x} - \frac{-2 \cdot 9^x}{3^x}\right) dx = \left[\text{ Kasutame seost } \frac{9^x}{3^x} = \left(\frac{9}{3}\right)^x = 3^x \right] =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(2 - 2 \cdot 3^x\right) dx = \left(2x - 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3}\right) \Big|_{-1}^1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{3^1}{\ln 3} - \left(2 \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{3^{-1}}{\ln 3}\right) =$$

$$= 2 - \frac{6}{\ln 3} + 2 + \frac{2}{3\ln 3} = 4 - \frac{16}{3\ln 3}.$$

Näide 8. Leiame joontega $y = 2x - x^2$ ja $y = -x$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus.

Joon $y = 2x - x^2$ on parabool.

Joon $y = -x$ on sirge.

Parabooli $y = 2x - x^2$ ja sirge $y = -x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$. Lahendame selle.

$2x - x^2 = -x$, $3x - x^2 = 0$, $x(3 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = -3$.

Leitava kujundi pindala

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx =$$

$$= \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx =$$

$$= \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Näide 9. Leiame joontega $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ ja $y = 2x$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus.

Joon $y = x^2$ on parabool.

Joon $y = \frac{x^2}{2}$ on parabool.

Joon $y = 2x$ on sirge.

Parabooli $y = x^2$ ja sirge $y = 2x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$. Lahendame selle.

$x^2 = 2x$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

Parabooli $y = \frac{x^2}{2}$ ja sirge $y = 2x$ lõikepunkti koordinaadid saadakse võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases}$. Lahendame selle.

$\frac{x^2}{2} = 2x$, $x^2 - 4x = 0$, $x(x - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Vastavalt $y_1 = 0$, $y_2 = 8$.

Leitava kujundi pindala koosneb kahest osast, liidame määratud integraalid, mis neid pindalasid arvutavad.

$$S=\int_0^2\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_2^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2+\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_2^4=4.$$

Määratud integraali arvutamise ülesanded

1. Arvutage määratud integraal $\int_1^2\left(x^2-2x+3\right)dx$. Vastus. $\frac{7}{3}$.
2. Arvutage määratud integraal $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$. Vastus. $\frac{100}{3}$.
3. Arvutage määratud integraal $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$. Vastus. $\ln 2$.
4. Arvutage määratud integraal $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\cos x dx$. Vastus. $\frac{3}{4}$.
5. Arvutage määratud integraal $\int_0^1\arctan x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$, võttes uueks muutujaks

   $t=\arctan x$. Vastus. $\frac{\pi^2}{32}$.
6. Arvutage määratud integraal $\int_1^e\sin\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}dx$, võttes uueks muutujaks $t=\ln x$.

   Vastus. $1-\cos 1$.
7. Leidke joontega $y=x^2$, $x=2$, $y=0$ piiratud kujundi pindala.

   Vastus. $2\frac{2}{3}$.
8. Leidke joontega $y=x^2$, $y=1$ piiratud kujundi pindala.

   Vastus. $1\frac{1}{3}$.
9. Leidke joontega $y=x$, $y=x^2$ piiratud kujundi pindala. Tehke joonis.

   Vastus. $\frac{1}{6}$.
10. Leidke joontega $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ piiratud kujundi pindala.

    Tehke joonis.

    Vastus. $8-\frac{3}{\ln 2}$.

11. Leidke joontega $y = 2^x$, $y = 4$, $x = 0$ piiratud kujundi pindala. Tehke joonis.
Vastus. $\sqrt{2}$.
12. Leidke joontega $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = 2$, $y = 0$ piiratud kujundi pindala.
13. Leidke joontega $y = 4 - 2x$, $y = x^2 - 4x + 4$ piiratud kujundi pindala. Tehke joonis.

Mitme muutuja funktsioon

Kui kahe teineteisest sõltumatu muutuva suuruse *x* ja *y* igale väärtuspaarile $(x;\, y)$ mingisugusest nende muutumispiirkonnast *D* vastab suuruse *z* üks kindel väärtus, siis öeldakse, et ***z* on kahe sõltumatu muutuja *x* ja *y* funktsioon**, mis on määratud piirkonnas *D*.

Kahe muutuja funktsiooni *z* märgitakse näiteks kujul

$$z = f(x,\, y),\quad z = F(x,\, y),\quad z = z(x,\, y).$$

Kahe muutuja funktsioon võib olla antud näiteks tabelina või analüütiliselt valemi abil.

Argumentide *x* ja *y* väärtuspaaride $(x;\, y)$ hulka, mille puhul funktsioon $z = f(x,\, y)$ on määratud, nimetatakse selle funktsiooni **määramispiirkonnaks**.

Kui *x* ja *y* iga väärtuspaari kujutada *xy*-tasandi punktina $M(x;\, y)$, siis funktsiooni määramispiirkonda kujutab teatud punktide hulk tasandil. Funktsiooni määramispiirkonnaks võib olla ka kogu tasand.

Kahe muutuja funktsiooni definitsiooni saab üldistada kolme või enama muutuja juhule.

Kui igale vaadeldavale muutujate $x, y, z, ..., u, t$ väärtuste hulgale vastab muutuja *w* üks väärtus, siis nimetatakse muutujat ***w* sõltumatute muutujate** $x, y, z, ..., u, t$ **funktsiooniks** ja kirjutatakse

$$w = f(x, y, z, ..., u, t) \text{ ehk } w = F(x, y, z, ..., u, t).$$

Samuti nagu kahe muutuja puhul, võib rääkida ka kolme, nelja ja enama muutuja funktsiooni määramispiirkonnast.

Kolme muutuja funktsiooni määramispiirkonnaks on mingi arvukolmikute $(x;\, y;\, z)$ hulk. Iga arvukolmik esitab *xyz*-ruumis mingi punkti $M(x;\, y;\, z)$. Järelikult on kolme muutuja funktsiooni määramispiirkonnaks mingisugune ruumipunktide hulk.

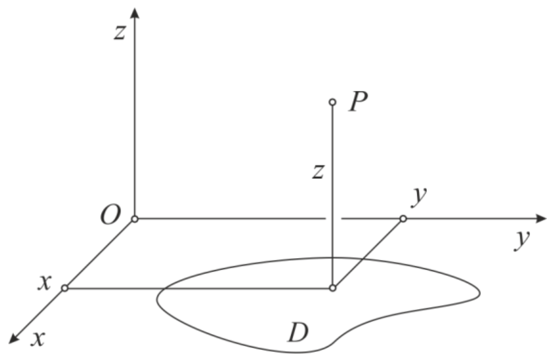
Nelja või suurema arvu muutujate funktsiooni määramispiirkonnal ei ole enam lihtsat geomeetrilist tõlgendust.

Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline kujutamine

Vaatleme funktsiooni $z = f(x, y)$, mis on määratud *xy*-tasandi piirkonnas *D* (selleks võib olla ka kogu tasand), ja ristkoordinaadistikku *Oxyz*. Püstitame piirkonna *D* igas punktis (x, y) ristsirge ja asetame sellele lõigu, mis võrdub funktsiooni väärtusega $f(x, y)$.

Nii saame ruumis punkti *P* koordinaatidega

$$P(x, y, z = f(x, y)).$$

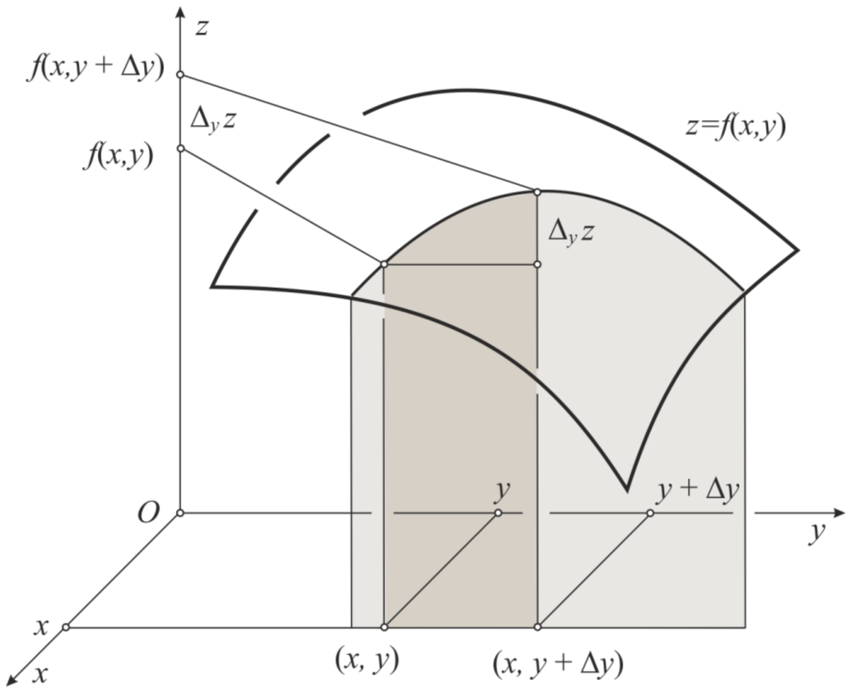


Punktid *P* asuvad ruumis mingil pinnal, selle pinna võrrand on $z = f(x, y)$ ja pinna projektsioon *xy*-tasandil on funktsiooni määramispiirkond *D*.

Kolme või enama muutuja funktsiooni ei saa ruumis graafiliselt kujutada.

Kahe muutuja funktsiooni osamuut

Vaatleme pinna $z = f(x, y)$ ja *yz*-tasandiga paralleelse tasandi $x = const$ lõikejoont.



Kuna *x* väärtus sellel tasandil on konstantne, siis muutub *z* joonel sellel joonel ainult sõltuvalt argumendi *y* muutumisest. Andes sõltumatule muutujale *y* muudu Δy, saab *z* muudu, mida nimetatakse ***z* osamuuduks *y* järgi** ja tähistatakse sümboliga $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Analoogselt, kui *y* väärtus on konstantne ja *x* saab muudu Δx, siis *z* saab muudu, mida nimetatakse ***z* osamuuduks *x* järgi**. Seda muutu tähistatakse sümboliga $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Muudu $\Delta_x z$ saab funktsioon pinna $z = f(x, y)$ ja *xz*-tasandiga paralleelse tasandi $y = const$ lõikejoonel.

Kahe muutuja funktsiooni osatuletised

Funktsiooni $z=f(x,y)$ **osatuletiseks *x* järgi** nimetatakse vastava osamuudu $\Delta_x z$ ja muudu Δx suhte piirväärtust Δx lähenemisel nullile.

Funktsiooni $z=f(x,y)$ osatuletist *x* järgi tähistatakse sümbolitega

$$z'_x\,;\quad f'_x(x,y)\,;\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,;\quad \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Seega definitsioonikohaselt

$$\boxed{z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}\,.$$

Analoogselt defineeritakse funktsiooni $z=f(x,y)$ **osatuletis *y* järgi**. Osatuletist *y* järgi tähistatakse sümbolitega

$$z'_y\,;\quad f'_y(x,y)\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Seega,

$$\boxed{z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}}\,.$$

Et $\Delta_x z$ arvutatakse muutumatu *y* puhul ja $\Delta_y z$ muutumatu *x* puhul, siis funktsiooni $z=f(x,y)$ **osatuletiseks *x* järgi** nimetatakse tema tuletist *x* järgi, mis arvutatakse eeldusel, et *y* on konstantne ning funktsiooni $z=f(x,y)$ **osatuletiseks *y* järgi** nimetatakse tema tuletist *y* järgi, mis arvutatakse eeldusel, et *x* on konstantne.

Osatuletised z'_x ja z'_y on **esimest järku osatuletised**.

Kahe muutuja funktsiooni **täisdiferentsiaali** tähistatakse sümboliga dz või df ja selleks on avaldis

$$dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y\,.$$

Sõltumatute muutujate muute Δx ja Δy nimetatakse sõltumatute muutujate *x* ja *y* **diferentsiaalideks** ja tähistatakse vastavalt *dx* ja *dy*. Nüüd saab täisdiferentsiaali kirjutada kujul

$$\boxed{dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy}\,.$$

Kahe muutuja funktsiooni täismuut ja täisdiferentsiaal on ligikaudu võrdsed:

$$\boxed{\Delta z\approx dz}\,.$$

Seda seost kasutatakse ligikaudsel arvutamisel, vastav valem on järgmine:

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y}\,.$$

Kahe muutuja funktsiooni teist järku osatuletised

Olgu antud kahe muutuja funktsioon

$$z = f(x,y).$$

Osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x{}'(x,y)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y{}'(x,y)$ on esimest järku osatuletised ja üldiselt on need muutujate *x* ja *y* funktsioonid. Seega saab leida nende uued osatuletised. Kahe muutuja funktsioonil on neli teist järku osatuletist. Nende tähistused on järgmised:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}{}''(x,y)$, siin diferentseeritakse funktsiooni $f(x,y)$ kaks korda *x* järgi;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}{}''(x,y)$, siin diferentseeritakse funktsiooni $f(x,y)$ kõigepealt *x* järgi ja siis saadud tulemust *y* järgi;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}{}''(x,y)$, siin diferentseeritakse funktsiooni $f(x,y)$ kõigepealt *y* järgi ja siis saadud tulemust *x* järgi;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}{}''(x,y)$, siin diferentseeritakse funktsiooni $f(x,y)$ kaks korda *y* järgi.

Kahe muutuja funktsiooni lokaalne maksimum ja miinimum

Öeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $M_0(x_0; y_0)$ (s.o. $x = x_0$ ja $y = y_0$ korral) **lokaalne maksimum**, kui

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

kõigi punktile $(x_0; y_0)$ küllalt lähedaste ja temast erinevate punktide $(x; y)$ puhul.

Öeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $M_0(x_0; y_0)$ (s.o. $x = x_0$ ja $y = y_0$ korral) **lokaalne miinimum**, kui

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

kõigi punktile $(x_0; y_0)$ küllalt lähedaste ja temast erinevate punktide $(x; y)$ puhul.

Funktsiooni lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse tema **lokaalseteks ekstreemumiteks**.

A. Kahe muutuja funktsiooni lokaalse ekstreemumi tarvilik tingimus on järgmine.

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on $x = x_0$, $y = y_0$ puhul lokaalne ekstreemum, siis argumentide nende väärtuste korral z **iga esimest järku osatuletis võrdub nulliga või puudub.**

B. Kahe muutuja funktsiooni lokaalse ekstreemumi piisavad tingimused.

Olgu punktis $M_0(x_0; y_0)$ esimest järku osatuletised võrdsed nulliga:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Siis punktis $M_0(x_0; y_0)$

1) funktsioonil $f(x, y)$ **on lokaalne maksimum**, kui

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0) \right]^2 > 0 \ \text{ ja } \ f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \ ;$$

2) funktsioonil $f(x, y)$ **on lokaalne miinimum**, kui

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0) \right]^2 > 0 \ \text{ ja } \ f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \ ;$$

3) funktsioonil $f(x, y)$ **ei ole lokaalset maksimumi ega lokaalset miinimumi**, kui

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0) \right]^2 < 0 \ ;$$

4) funktsioonil $f(x, y)$ **võib olla lokaalne maksimum või lokaalne miinimum, kuid võib ka mitte olla**, kui

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0) \right]^2 = 0$$

(sel juhul on vaja täiendavat uurimist).

Näide 1. Leiame järgmise funktsiooni määramispiirkonna:

$$z = \frac{1}{x + y}.$$

Määramispiirkonna annab tingimus $x + y \neq 0$, sest nulliga ei saa jagada. Sellest tingimusest saame, et $y \neq -x$. Seega määramispiirkonnas on kõik *xy*-tasandi punktid, välja arvatud sirge $y = -x$ punktid. Sirge $y = -x$ poolitab koordinaattasandi II ja IV veerandi.

Näide 2. Leiame järgmise funktsiooni määramispiirkonna:

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} .$$

Määramispiirkonna annab tingimus $4 - x^2 - y^2 > 0$, sest avaldis $4 - x^2 - y^2$ on ruutjuure all. Range võrratus on sellepärast, et nulliga ei saa jagada (teatavasti $\sqrt{0} = 0$).

Kirjutame selle võrratuse ümber ja saame, et $x^2 + y^2 < 4$. Seega moodustavad määramispiirkonna ringjoone $x^2 + y^2 = 4$ sees olevad punktid. Selle ringjoone keskpunkt on $(0, 0)$ ja raadius on 2.

Näide 3. Leiame järgmise funktsiooni määramispiirkonna:

$$z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - y^2} .$$

Määramispiirkonna annavad tingimused

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 , \\ 9 - y^2 \geq 0 . \end{cases}$$

Lahendame selle võrratuste süsteemi ja saame määramispiirkonna.

$$\begin{cases} x \leq -2 , \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x \geq 2 , \\ -3 \leq y \leq 3 . \end{cases}$$

Määramispiirkonnaks on kaks ühest küljest lahti olevat ristkülikut, mida piiravad sirged $x = -2, \quad x = 2, \quad y = -3, \quad y = 3$ ja mis "lamavad".

Näide 4. Leiame z'_x ja z'_y, kui $z = x^2 + y^2$.

Kui leiame z'_x, siis on *y* konstantne ja seega $z'_x = 2x + 0 = 2x$.

Kui aga leiame z'_y, siis on *x* konstantne ja $z'_y = 0 + 2y = 2y$.

Näide 5. Leiame z'_x ja z'_y, kui $z = x^3 + y^3 - 2x^2 y + 3xy - 4x + 7y - 2$.

Kui leiame z'_x, siis on *y* konstantne ja seega

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 0 - 2y \cdot 2x + 3y \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 0 - 0 = \\ &= 3x^2 - 4xy + 3y - 4. \end{aligned}$$

Kui leiame z'_y, siis on *x* konstantne ja

$$\begin{aligned} z'_y &= 0+3y^2-2x^2\cdot 1+3x\cdot 1-0+7\cdot 1-0= \\ &=3y^2-2x^2+3x+7. \end{aligned}.$$

Näide 6. Olgu $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, leiame z'_x ja z'_y.

Nii z'_x kui ka z'_y leidmiseks kasutame kahe funktsiooni jagatise tuletise võtmise valemit.

$$z'_x=\frac{(1-0)(x+y)-(x-y)(1+0)}{(x+y)^2}=\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}.$$

$$z'_y=\frac{(0-1)(x+y)-(x-y)(0+1)}{(x+y)^2}=\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2}.$$

Näide 7. Leiame z'_x ja z'_y, kui $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Mõlema osatuletise leidmisel peab võtma liitfunktsiooni tuletist.

$$z'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\right).$$

$$z'_y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y\right).$$

Näide 8. Leiame z'_x ja z'_y, kui $z=\arcsin\sqrt{x+2y}$.

Mõlema osatuletise leidmisel peab võtma liitfunktsiooni tuletist.

$$z'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x+2y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2y}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{1-x-2y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2y}}.$$

$$z'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x+2y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2y}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{1-x-2y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2y}}.$$

Näide 9. Leiame w'_x, w'_y ja w'_z, kui $w=2^{x^2-5y+z^2}$.

$$w'_x=2^{x^2-5y+z^2}\ln 2\cdot 2x.$$
$$w'_y=2^{x^2-5y+z^2}\ln 2\cdot(-5).$$
$$w'_z=2^{x^2-5y+z^2}\ln 2\cdot 2z.$$

Näide 10. Leiame funktsiooni $z = 4x^2 + 5y^2$ täisdiferentsiaal *dz*.

Teatavasti

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy .$$

Leiame vajaminevad osatuletised.

$$f'_x(x, y) = 4 \cdot 2x + 0 = 8x ,$$
$$f'_y(x, y) = 0 + 5 \cdot 2y = 10y .$$

Seega

$$dz = 8x\,dx + 10y\,dy .$$

Näide 11. Arvutame ligikaudu täisdiferentsiaali abil $1,03^{0,96}$.

Kasutame ligikaudse arvutamise valemit

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y .$$

Moodustame funktsiooni $f(x, y) = x^y$.

Võtame $x = 1$; $\Delta x = 0,03$; $y = 1$; $\Delta y = -0,04$.

Leiame osatuletised.

$$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1} \quad \text{(astmefunktsiooni tuletis)},$$

$$f'_y(x, y) = x^y \ln x \quad \text{(eksponentfunktsiooni tuletis)}.$$

Arvutame

$$f(1,1) = 1,$$

$$f'_x(1, 1) = 1 ,$$

$$f'_y(1, 1) = 1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

ja saame, et

$$1,03^{0,96} \approx 1 + 1 \cdot 0,02 + 0 \cdot (-0,04) = 1,02 .$$

Näide 12. Leiame funktsiooni $z = 4x^2 + y^3 - x^2 y + 4x - 6y - 1$ kõik teist järku osatuletised.

Selleks eiame kõigepealt esimest järku osatuletised z'_x ja z'_y .

$$z'_x = 8x - 2xy + 4 ,$$

$$z'_y = 3y^2 - x^2 - 6.$$

Teist järku osatuletised saame, kui diferentseerime esimest järku osatulisi nii *x* kui ka *y* järgi.

$$z'_{xx} = 8 - 2y, \quad z'_{xy} = -2x, \quad z'_{yx} = -2x, \quad z'_{yy} = 6y.$$

Näide 13. Leiame funktsiooni $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ lokaalsed ekstreemumid.

Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumid võivad olla punktides, mille koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Leiame vajaminevad osatuletised.

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$
$$f'_y(x, y) = 6xy - 12.$$

Moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

ja lahendame selle.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist $y = \dfrac{2}{x}$, asendame selle esimesse võrrandisse ja saame ruutvõrrandi x^2 suhtes:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on $x^2 = 1$ ja $x^2 = 4$ ja seega on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

lahenditeks järgmise nelja punkti koordinaadid:

$$P_1(-1, -2), \ P_2(1, 2), \ P_3(-2, -1), \ P_4(2, 1).$$

Nendes punktides võivad funktsioonil $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ olla lokaalsed ekstreemumid. Teeme ekstreemumite olemasolu ja liigi kindlaks lokaalse ekstreemumi piisavate tingimuste abil.

Selleks leiame kõigepealt teist järku osatuletised.

$$f'_{xx}(x, y) = 6x\,,$$
$$f'_{yy}(x, y) = 6x\,,$$
$$f'_{xy}(x, y) = 6y\,.$$

Vaatleme punkti $P_1(-1, -2)$. Selles punktis

$$f''_{xx}(-1, -2) \cdot f''_{yy}(-1, -2) - \left[f''_{xy}(-1, -2) \right]^2 = (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 = 36 - 144 < 0$$

ja seega funktsioonil $f(x, y)$ ei ole punktis $P_1(-1, -2)$ lokaalset maksimumi ega lokaalset miinimumi.

Vaatleme punkti $P_2(1, 2)$. Selles punktis

$$f''_{xx}(1, 2) \cdot f''_{yy}(1, 2) - \left[f''_{xy}(1, 2) \right]^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = 36 - 144 < 0$$

ja seega funktsioonil $f(x, y)$ ei ole punktis $P_2(1, 2)$ lokaalset maksimumi ega lokaalset miinimumi.

Vaatleme punkti $P_3(-2, -1)$. Selles punktis

$$f''_{xx}(-2, -1) \cdot f''_{yy}(-2, -1) - \left[f''_{xy}(-2, -1) \right]^2 = (-12) \cdot (-12) - (-6)^2 = 144 - 36 > 0$$

ning seega on funktsioonil $f(x, y)$ punktis $P_3(-2, -1)$ lokaalne ekstreemum ja nimelt maksimum, sest

$$f''_{xx}(-2, -1) = -12 < 0\,.$$

Arvutame funktsiooni lokaalse maksimumi väärtuse:

$$f_{\max}(-2, -1) = 28.$$

Vaatleme punkti $P_4(2, 1)$. Selles punktis

$f''_{xx}(2, 1) \cdot f''_{yy}(2, 1) - \left[f''_{xy}(2, 1) \right]^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 144 - 36 > 0$ ning seega on funktsioonil $f(x, y)$ punktis $P_4(2, 1)$ lokaalne ekstreemum ja nimelt miinimum, sest

$$f''_{xx}(2, 1) = 12 > 0\,.$$

Arvutame funktsiooni lokaalse miinimumi väärtuse:

$$f_{\min}(2, 1) = -28.$$

Näide 14. Leiame funktsiooni $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x + 5y - 1$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame vajaminevad osatuletised.

$$f'_x(x, y) = 2x - y - 3,$$
$$f'_y(x, y) = 4y - x + 5.$$

Moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ 4y - x + 5 = 0. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendiks on

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Saime punkti $P(1, -1)$. Teeme selles punktis ekstreemumi olemasolu ja liigi kindlaks lokaalse ekstreemumi piisavate tingimuste abil. Selleks leiame kõigepealt teist järku osatuletised.

$$f'_{xx}(x, y) = 2,$$
$$f'_{yy}(x, y) = 4,$$
$$f'_{xy}(x, y) = -1.$$

Punktis $P(1, -1)$

$$f_{xx}''(1, -1) \cdot f_{yy}''(1, -1) - \left[f_{xy}''(1, -1) \right]^2 = 2 \cdot 4 - (-1)^2 = 8 - 1 > 0$$

ning seega funktsioonil $f(x, y)$ on punktis $P(1, -1)$ lokaalne ekstreemum ja nimelt miinimum, sest

$$f_{xx}''(1, -1) = 2 > 0.$$

Arvutame funktsiooni lokaalse miinimumi väärtuse:

$$f_{\min}(1, -1) = -5.$$

Ülesanded kahe muutuja funktsiooni kohta

1. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{3xy}+\dfrac{1}{x-y}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel.
2. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{xy}+\dfrac{1}{x+y}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel.
3. Esitage funktsiooni $z=\ln\left(x^2-y\right)$ määramispiirkond võrratuse abil ja kujutage joonisel.
   Vastus. $y<x^2$.
4. Esitage funktsiooni $z=\log\left(y+x^2\right)$ määramispiirkond võrratuse abil ja kujutage joonisel.
5. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-16}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel.
   Vastus. $\begin{cases}|x|\geq 1\\ |y|\geq 2\end{cases}$.
6. Esitage funktsiooni $z=x+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel.
7. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel.
8. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{4-y^2}$ määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage joonisel. .
9. Esitage funktsiooni $z=\sqrt{y-\ln x}$ määramispiirkond võrratuse abil ja kujutage joonisel.
10. Leidke funktsiooni $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ osatuletised z'_x ja z'_y.
    Vastus. $z'_x=2xy^2-y^3$, $z'_y=2x^2y-3xy^2-3$.
11. Leidke funktsiooni $z=5x^2-4xy^2$ osatuletised z'_x ja z'_y.
    Vastus. $z'_x=10x-4y^2$, $z'_y=-8xy$.
12. Leidke funktsiooni $z=8x^2-4x^2y^2$ osatuletised z'_x ja z'_y.
13. Leidke funktsiooni $z=2x^2-4y^2-3xy+6x+7$ osatuletised z'_x ja z'_y.
14. Leidke funktsiooni $z=4x^2+2y^2+5xy-3x+8$ osatuletised z'_x ja z'_y.
15. Leidke funktsiooni $z=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{4}y^2-9xy+6x$ osatuletised z'_x ja z'_y.
16. Leidke funktsiooni $z=x\sin y$ osatuletised z'_x ja z'_y.
17. Leidke funktsiooni $z=\sin(xy)-3x+4y$ osatuletised z'_x ja z'_y.
    Vastus. $z'_x=y\cos(xy)-3$, $z'_y=x\cos(xy)+4$.
18. Leidke funktsiooni $z=\cos(2xy)-2x-3y$ osatuletised z'_x ja z'_y.

19. Leidke funktsiooni $z = e^{5x+6y} + 4x^2 - 4y^2$ osatuletised z'_x ja z'_y.

20. Leidke funktsiooni $z = \sin^3 x + \cos^3 y$ osatuletised z'_x ja z'_y.

21. Leidke funktsiooni $z = 4^{xy}$ osatuletised z'_x ja z'_y.

22. Leidke funktsiooni $z = \arctan(2x - 3y)$ esimest järku osatuletised.

23. Leidke funktsiooni $z = \cos\left(\frac{1}{5}x - 3y\right)$ esimest järku osatuletised.

24.Leidke funktsiooni $z = \tan(2x + 5y)$ esimest järku osatuletised.

Vastus. $z'_x = \frac{1}{\cos^2(2x+5y)} \cdot 2$, $z'_y = \frac{1}{\cos^2(2x+5y)} \cdot 5$.

25. Leidke funktsiooni *z* täisdiferentsiaal *dz*, kui $z = 8x^3 - 9y^5$.

Vastus. $dz = 24x^2 dx - 45y^4 dy$.

26. Leidke funktsiooni *z* täisdiferentsiaal *dz*, kui $z = 3x^2 + 7y^3$

27. Arvutage ligikaudu $(1{,}02)^4 \cdot (0{,}97)^2$, kasutades täisdiferentsiaali.

28. Arvutage ligikaudu $(0{,}98)^2 \cdot (1{,}03)^3$, kasutades täisdiferentsiaali.

29. Arvutage ligikaudu täisdiferentsiaali abil $(2{,}04)^2 + (1{,}99)^2$.

30. Arvutage ligikaudu täisdiferentsiaali abil $\sqrt{2{,}95^2 + 4{,}03^2}$.

31. Leidke funktsiooni $z = 6x^2 - y^2 + xy + 5x - 1$ kõik teist järku osatuletised.

32. On antud funktsioon $z = \sin^2(2x - 3y)$. Leidke selle funktsiooni esimest ja teist järku osatuletised.

33. Leidke funktsiooni $z = x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1$ lokaalne ekstreemum.

34. Leidke funktsiooni $z = x^2 + y^2 + x + 3y - 1$ lokaalne ekstreemum.

35. Leidke funktsiooni $z = x^2 - xy + y^2 + x - 2y$ lokaalne ekstreemum.

36. Leidke funktsiooni $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ lokaalne ekstreemum.