Numbriliste meetodite lühikonspekt
kevadsemester

Õppekirjandus:
J. Janno "Arvutusmeetodid", TTÜ kirjastus, 2016.

Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandit

$$f(x) = 0,$$

kus $f(x)$ on ühe muutuja funktsioon.
Ligikaudseid meetodeid võrrandite lahendamiseks nimetatakse **iteratsioonimeetodi-teks**. Iteratsioonimeetodi rakendamiseks on vaja alglähendit (saab leida graafiliselt, tabeli abil vms) ning siis täpsustatakse soovitud lahendit nõutud täpsuseni.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral teisendatakse võrrand $f(x) = 0$ kujule $x = g(x)$. Kui $|g'(x)| < 1$, siis harilik iteratsioonimeetod koondub ning ligikaudseid lahendeid saab leida eeskirjaga

$$x_n = g(x_{n-1}).$$

Newtoni meetodi korral leitakse ligikaudne lahend eeskirjaga

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Lõikajate meetodi korral on ligikaudse lahendi leidmiseks vaja kasutada kahte eelnevat lähendit

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Hariliku iteratsioonimeetodi korral teisendatakse võrrandisüsteem

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

kujule

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases}$$

Kui Jacobi maatriks

$$G'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

on normi poolest hinnatav ühest väiksema konstandiga, siis koonduv HIM on kujul

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}). \end{cases}$$

Interpoleerimine

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \ \ j = 0, 1, \dots, n.$$

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Ehk

$$\Phi(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \cdot f(x_1) +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \cdot f(x_n).$$

Sellist polünoomi nimetatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.

Sama polünoomi võib kirjutada ka kujule

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

kus $f(x_0, x_1)$ tähistab I järku diferentssuhet, $f(x_0, x_1, x_2)$ on II järku diferentssuhe jne. Seda polünoomi nimetatakse Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.

Tükiti polünomiaalsel interpoleerimisel konstrueeritakse igale osalõigule $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2 \ldots, n$ l astme polünoom, lõigu otspunktides peavad olema täidetud pidevuse tingimused. Kui ka sellise funktsiooni tuletised järguni p on pidevad, siis saame rääkida lähendamisest splainiga $S^{l,p}(x)$.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodiga

Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, kasutatakse funktsioonide lähendamiseks vähimruutude meetodit. Leitakse selline funktsiooni $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutatakse funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Selliseks funktsiooniks sobib

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid. Näiteks $\phi_j(x) = x^j$. Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2.$$

Funktsiooni J miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Lineaarne juht

Kui $\Phi(x) = c_1 x + c_2$, siis on vaja määrata kordajad c_1 ja c_2.

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right)^2$$

ja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial c_1} = 2\sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial c_2} = 2\sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Siit saadakse süsteemi

$$\begin{cases} c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

lahendamisel kätte vajalikud kordajad c_1 ja c_2.

Analoogiliselt saab leida kordajad c_1, c_2, c_3 **ruutfunktsioonile** $\Phi = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Selleks oleks vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^4 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^3 + c_3 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i^2 \\ c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^3 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_3 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i + c_3 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

Milline oleks lineaarne võrrandisüsteem $\Phi(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$ kordajate c_1, c_2, c_3 ja c_4 määramiseks?

Numbriline diferentseerimine

Valemeid tuletise ligikaudse väärtuse leidmiseks nimetatakse diferentsvalemiteks. Olgu võrk ühtlane, s.t $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Diferentslvalem sammuga ette

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}.$$

Diferentslvalem sammuga taha

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}.$$

Mõlema valemi viga on suurusjr̃ku h.
Keskmistatud diferentsvalem

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h},$$

selle valemi viga on suurusjärku h^2.
Diferentsvalem II järku tuletise leidmiseks

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Numbriline integreerimine

Numbrilist integreerimist kasutatakse juhul, kui funktsioon $f(x)$ pole teada või see on integreerimiseks liiga keeruline.
Olgu võrk ühtlane, s.t $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ristkülikvalem

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Trapetsvalem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Simpsoni valem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Simpsoni valemit saab rakendada, kui sõlmi x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ on paaritu arv.

Diferentsiaalvõrrandid

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.
Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku.
Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

1. järku HDV üldkuju on järgmine:

$$F(x, y, y') = 0,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon.
Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu avaldatud, siis see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV normaalkuju järgmine:

$$y' = f(x, y),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, y, y'y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ja

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.
$n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0^0, \\ y^{(1)}(x_0) = y_0^1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Seda ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Eraldatud muutujatega DV
Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

ja erilahendiks

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0,$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

Lineaarne DV Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Lineaarse DV üldlahend:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dc}dx$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine
Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja y_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi y lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots$ nii, et $y_i \approx y(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right).$$

Keskpunkti meetod

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Runge-Kutta meetod

$$y_{i+1} = y_i + c_1 hf(x_i, y_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, y_i + \beta hf(x_i, y_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.