

# MATEMAATIKA TÄIENDUSÕPE YMA0090

**Kairi Kasemets**

kairi.kasemets@ttu.ee  
staff.ttu.ee/~kairik

1. Plekitahvlist tuleb välja lõigata täisnurkne kolmnurk, mille pindala ruut on maksimaalne. Leidke selle kolmnurga kaatetite pikkused, kui hüpotenuusi pikkus on 20 cm.

2. Ehitatakse torni, mille alumine osa on silindri-, ülemine osa aga koonusekujuline. Koonusekujulise osa telglõikeks on võrdkülgne kolmnurk. Milline peab olema silindrilise osa põhja raadius, et torni ruumala oleks maksimaalne, kui torni telglõike ümbermõõt on 90 m?

---

### L'Hospitali reegel

Määramatuste  $\frac{0}{0}$  ja  $\frac{\infty}{\infty}$  korral taandatakse jagatise piirväärtuse leidmine lugeja ja nimetaja tuletiste jagatise piirväärtuse leidmisele, st kui

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0$$

või

$$\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$$

ning eksisteerib piirväärtus

$$A = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siis

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

---

3. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$$

4. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$$

5. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$$

6. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right)$$

7. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

8. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

---

**Vektoriks** nimetatakse suunatud lõiku. Vektori pikkuseks nimetatakse selle lõigu pikkust.

Vektoreid, mis asuvad kas ühel ja samal sirgel või siis paralleelsetel sirgetel, nimetatakse kollineaarseteks vektoriteks (tähistatakse  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ).

Vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  **skalaarkorrutis**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

kus  $\varphi$  on nurk nende vektorite vahel.

Vektorite  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  skalaarkorrutis koordinaatides

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

---

9. Punktide  $A(2; -3; 4)$ ,  $B(7; 2; -1)$  ja  $C(-3; 5; 6)$  abil arvutada koordinaadid vektoritel  $\vec{AC} + \vec{AB}$  ja  $\vec{CA} + \frac{1}{5} \vec{CB}$ .

10. Arvutada  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , kui  $\vec{a} = (2; -3; -5)$  ja  $\vec{b} = (-1; 4; -2)$ .

11. Kolmnurga tipud on  $A(0; 2)$ ,  $B(4; 4)$  ja  $C(4; -1)$ . Joonestage see kolmnurk koordinaattasandile ja arvutage kolmnurga pindala. Koostage sirge  $AB$  võrrand. Kui suur tõus on sirgel, millel paikneb tipust  $C$  joonestatud kolmnurga kõrgus?

12. Arvutada kolmnurga tipud ja ümbermõõt, kui küljed on antud võrranditega  $5x - 3y - 15 = 0$ ,  $x + 5y - 3 = 0$  ja  $3x + y + 5 = 0$ .

**Sirge võrrand**

tõusu ja algordinaadi kaudu

$$y = kx + b$$

telglõikude kaudu

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ühe punkti ja tõusu kaudu

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

kahe punkti kaudu

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Sirge üldvõrrandiks on

$$Ax + By + C = 0.$$

**Ringjoone võrrand on**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

kus  $r$  on ringjoone raadius ja punktis  $(a; b)$  asub ringjoone keskpunkt.

Ringjoone üldvõrrandiks on

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

---

**13.** Leida sirge võrrand, kui on teada:

- 1) tema kaks punkti  $A(-3; 2)$  ja  $B(4; -1)$ ;
- 2) algordinaat 2 ja tõusunurk  $\frac{\pi}{3}$ ;
- 3) punkt  $C(4; -1)$  ja tõus  $-3$ ;
- 4) tema telglõigud  $a = 4$  ja  $b = -2$ ;
- 5) punkt  $D(-1; 3)$  ja tõusunurk  $135^\circ$ .

**14.** Leida sirgega  $2x - 3y + 2 = 0$  ristiolev sirge, mis läbib punkti  $A(4; -2)$ .**15.** Selgitada, kas punktid  $A(3; 1)$ ,  $B(2; 3)$  ja  $C(-2; 1)$  asuvad sirgel  $2x + 3y - 13 = 0$ .**16.** Millised punktidest  $A(2; 1)$ ,  $B(3; -2)$ ,  $C(-3; 2)$ ,  $D(-2; -4)$  on ringi sees, kui ringjoone võrrand on

- 1)  $x^2 + y^2 = 9$
- 2)  $(x - 1)^2 + y^2 = 16$

**17.** Määrata ringjoone keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrand on:

- 1)  $x^2 + 2x + y^2 = 0$

2)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 64 = 0$

18. Sirge  $5x - 4y + 40 = 0$  lõik, mis jääb koordinaattelgede vahele, on ringjoone dia-meetriks. Koostada ringjoone võrrand.

19. Leida antud joonte lõikepunktid. Mis jooned need on? Skitseerida joonis.

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$y = x + 2$$

20. Leida antud joonte lõikepunktid. Mis jooned need on? Skitseerida joonis.

$$x^2 - 2x - 3 + y^2 + 8y = 0$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

21. Skitseerida funktsiooni

$$y = |1 - x| - |x + 2| - 2$$

graafik.

22. On antud funktsioon  $f(x) = x^2 + bx$  ( $b > 0$ ). Joonestada  $x$ -teljega ja joonega  $y = f(x)$  piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet  $x$ -teljel ja selle vastastipp joonel  $y = f(x)$ . Leida selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.

23. Leida sirge  $s$  võrrand, kui see läbib punkte  $A(1; 2; 3)$  ja  $B(-5; -2; 7)$ .

24. Leida sirge  $u$  parameetiline kuju, kui sirge on määratud punkti  $C(4; -1; -12)$  ja sihivektoriga  $\vec{s} = (4; -2; 6)$ . Kas punkt  $D(-6; 1; -5)$  asub sirgel?

25. Kas tasand  $4x - y + 3z + 1 = 0$  läbib punkte  $A(-1; 6; 3)$ ,  $B(3; -2; -5)$ ,  $C(0; 4; 1)$ ?

26 Koosta tasandi võrrand, kui tasand läbib kolme punkti  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-2; 1; 2)$  ja  $C(-2; -1; 3)$ .

---

### Kombinatorika

$$P_n = n!$$

$$V_n^m = A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

### Tõenäosusteooria

... uurib juhuslikke sündmusi ja nähtusi ning nendega seoses ilmnevaid seaduspärasusi. Sündmused jagatakse kindlateks, võimatuteks ning juhuslikeks sündmusteks.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **summaks** nimetatakse sündmust, mis seisneb kas sündmuse  $A$  või  $B$  või mõlema toimumises.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **korrutiseks** nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse  $A$  kui ka  $B$  toimumises.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **vaheks** nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse  $A$  toimumises, kui ei toimu sündmus  $B$ .

**Klassikaline tõenäosus** on võrdne sündmuse jaoks soodsate võimaluste arvu  $m$  kõigi võimaluste arvu  $n$  jagatisega

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

### Bernoulli valem

$$P_{n,m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

kus

$p$  - sündmuse  $A$  toimumise tõenäosus,

$q = 1 - p$  - vastandsündmuse  $\bar{A}$  toimumise tõenäosus.

Tõenäolisem sündmuse  $A$  esinemise arv  $m$  rahuldab seost

$$np - q \leq m \leq np + p$$

---

**27.** Mitu erinevat kuuekohalist arvu saab moodustada numbritest 1, 2, 5, 7, 8, 9, kui kordused on lubatud? Mitu siis, kui kordused pole lubatud?

**28.** Puhvetis on müügil kaheksa erineva täidisega pirukad. Mitmel erineval viisil võiks tudeng neist kolmest pirukast koosneva valiku teha, kui ta tahab osta kõik pirukad erineva täidisega?

**29.** Kui suur on tõenäosus, et õpetaja kutsub vastama Juulise, kui temaga on tunnis veel 21 õpilast?

**30.** Kotis on 10 haput ja kaks magusat õuna. Kui suur on tõenäosus, et võttes sealt pimesi neli õuna, saadakse vähemalt üks magus õun?

**31.** Värvitud tahkudega kuup tükeldatakse tuhandeks ühesuuruseks kuubiks ja need segatakse. Leida tõenäosus, et saadud kuupide hulgast juhuslikult valitud kuubil on:

- 1) kaks tahku värvitud;
- 2) kolm tahku värvitud.

**32.** Sportlasel on kõrgushüppes soovitud kõrguse ületamise tõenäosus igal hüppel 0,7 ja ta saab kolm katsed. Kui tõenäoline on, et ta ületab selle kõrguse alles viimasel katsel?

**33.** Iga seemne idanemise tõenäosus on 0,8. Kui suur on tõenäosus, et kuuest seemnest vähemalt viis idanevad?

**34.** Raamatutiraaži mistahes raamatul võib olla köitedefekt tõenäosusega 0,12. Leida kõige tõenäosem defektiga köidete arv tellitud 30 raamatu hulgas ning vastav tõenäosus.