

# MATEMAATIKA TÄIENDÕPE YMA0090

**Kairi Kasemets**

kairi.kasemets@ttu.ee  
staff.ttu.ee/~kairik

1. Skitseerida funktsiooni

$$y = |x| - |x - 2| - 2$$

graafik.

2. On antud funktsioon  $f(x) = x^2 + bx$  ( $b > 0$ ). Joonestada  $x$ -teljega ja joonega  $y = f(x)$  piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet  $x$ -teljel ja selle vastastipp joonel  $y = f(x)$ . Leida selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.

3. Leida sirge  $s$  võrrand, kui see läbib punkte  $A(1; 2; 3)$  ja  $B(-5; -2; 7)$ .

4. Leida sirge  $u$  parameetriline kuju, kui sirge on määratud punkti  $C(4; -1; -12)$  ja sihivektoriga  $\vec{s} = (4; -2; 6)$ . Kas punkt  $D(-6; 1; -5)$  asub sirgel?

5. Kas tasand  $4x - y + 3z + 1 = 0$  läbib punkte  $A(-1; 6; 3)$ ,  $B(3; -2; -5)$ ,  $C(0; 4; 1)$ ?

6. Koosta tasandi võrrand, kui tasand läbib kolme punkti  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-2; 1; 2)$  ja  $C(-2; -1; 3)$ .

---

### Kombinatorika

$$P_n = n!$$

$$V_n^m = A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

---

### Tõenäosusteooria

... uurib juhuslikke sündmusi ja nähtusi ning nendega seoses ilmnevaid seaduspärasusi. Sündmused jagatakse kindlateks, võimatuteks ning juhuslikeks sündmusteks.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **summaks** nimetatakse sündmust, mis seisneb kas sündmuse  $A$  või  $B$  või mõlema toimumises.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **korrutiseks** nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse  $A$  kui ka  $B$  toimumises.

Sündmuste  $A$  ja  $B$  **vaheks** nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse  $A$  toimumises, kui ei toimu sündmus  $B$ .

**Klassikaline tõenäosus** on võrdne sündmuse jaoks soodsate võimaluste arvu  $m$  kõigi võimaluste arvu  $n$  jagatisega

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

### Bernoulli valem

$$P_{n,m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

kus

$p$  - sündmuse  $A$  toimumise tõenäosus,

$q = 1 - p$  - vastandsündmuse  $\bar{A}$  toimumise tõenäosus.

Tõenäolisem sündmuse  $A$  esinemise arv  $m$  rahuldab seost

$$np - q \leq m \leq np + p$$

---

**7.** Mitu erinevat kuuekohalist arvu saab moodustada numbritest 1, 2, 5, 7, 8, 9, kui kordused on lubatud? Mitu siis, kui kordused pole lubatud?

**8.** Puhvetis on müügil kaheksa erineva täidisega pirukad. Mitmel erineval viisil võiks tudeng neist kolmest pirukast koosneva valiku teha, kui ta tahab osta kõik pirukad erineva täidisega?

**9.** Kui suur on tõenäosus, et õpetaja kutsub vastama Juuliusse, kui temaga on tunnis veel 21 õpilast?

**10.** Kotis on 10 haput ja kaks magusat õuna. Kui suur on tõenäosus, et võttes sealt pimesi neli õuna, saadakse vähemalt üks magus õun?

**11.** Värvitud tahkudega kuup tükeldatakse tuhandeks ühesuuruseks kuubiks ja need segatakse. Leida tõenäosus, et saadud kuupide hulgast juhuslikult valitud kuubil on:

1) kaks tahku värvitud;

2) kolm tahku värvitud.

**12.** Sportlasel on kõrgushüppes soovitud kõrguse ületamise tõenäosus igal hüppel 0,7 ja ta saab kolm katsset. Kui tõenäone on, et ta ületab selle kõrguse alles viimasel katsel?

**13.** Raamatutiraaži mistahes raamatul võib olla köitedefekt tõenäosusega 0,12. Leida kõige tõenäosem defektiga köidete arv tellitud 30 raamatu hulgas ning vastav tõenäosus.

---

### Aritmeetiline jada

Jada, milles iga liikme ja temale eelneva liikme vahe on konstantne, nimetatakse aritmeetiliseks jadaks.

$$\text{Jada vahe } d = a_i - a_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\text{Üldliige } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{Summa } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

### Geomeetriline jada

Jada, milles iga liikme ja temale eelneva liikme jagatis on konstantne, nimetatakse geomeetriliseks jadaks.

$$\text{Jada tegur } q = \frac{a_i}{a_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\text{Üldliige } a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\text{Summa } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Hääbuva geomeetrilise jada summa

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

---

**14.** Kaks keha alustasid teineteisele lähenemist 38 m kauguselt. Esimeses sekundis läbivad mõlemad kehad 1 m, igas järgmises sekundis läbib üks keha 2 m rohkem ja teine 3 m rohkem kui eelmises sekundis. Mitme sekundi pärast kehad kohtuvad?

**15.** Vaatleme kõiki kolmekohalisi arve, mis jagamisel neljaga annavad jäägi üks.

- 1) Kirjutage 3 esimest ja 3 viimast sellist arvu.
- 2) Leidke kõikide selliste arvude summa.
- 3) Järgnevalt leidke kõikide kolmekohaliste arvude summa.

4) Mitu protsenti punktis 2 leitud summa moodustab punktis 3 leitud summast?

16. Geomeetrilise jada viienda ja esimese liikme vahe on 15 ning neljanda ja teise liikme vahe on 6. Leida geomeetrilise jada esimene liige, tegur ja esimese kaheksa liikme summa.

17. Geomeetrilise jada kolmas liige on võrdne selle jada teguriga, mis on 3.

1. Mitme liikme summa alates jada esimesest liikmest on arv  $364\frac{1}{3}$ .

2. Leidke niisuguse aritmeetilise jada 25. liige, mille teine liige on võrdne antud geomeetrilise jada kolmanda liikme vastandarvuga ja viies liige on võrdne antud geomeetrilise jada neljanda liikmega.

---

### Integraal

Funktsiooni  $f(x)$  algfunktsiooniks nim. funktsiooni  $F(x)$ , mille korral

$$[F(x)]' = f(x) \text{ iga } x \in X.$$

Et  $F'(x) = (F(x) + C)'$ , siis  $F(x) + C$  nim. algfunktsioonide üldavaldiseks. Funktsiooni  $f(x)$  algfunktsioonide üldavaldist nim. funktsiooni  $f(x)$  määramata integraaliks ning tähistatakse

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Kehtivad

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int 0dx = C$$

$$\int 1dx = x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \text{ kui } a \neq -1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Ositi integreerimine

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Määratud integraal (Newton-Leibnizi valem)

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

---

18. Leida

$$\int \left( \sin x - 4x^3 + \frac{1}{x} \right) dx$$

19. Leida

$$\int \left( \frac{1}{x^3} + \cos x \right) dx$$

20. Leida

$$\int \left( \sqrt[3]{x^2} + \frac{x-1}{x^4} \right) dx$$

21.

$$\int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx$$

22. Leida

$$\int x e^x dx$$

23. Leida

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx$$

24. Leida

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} dx$$

25. Leida

$$\int_{-1}^{-2} x^3 dx$$

26. Leida

$$\int_0^2 (x^2 + x - 1) dx$$

27. Leida joontega  $y = 0$ ,  $y = x$  ja  $x = 2$  piiratud kujundi pindala.

28. Leida joontega  $y = 3x^2 - x$  ja  $y = 8x - 6$  piiratud kujundi pindala.