XI peatükk
TEIST JA KOLMANDAT JÄRKU DETERMINANDI GEOMEETRILINE TÕLGENDUS

§ 1. Teist järku determinandi geomeetriline tõlgendus

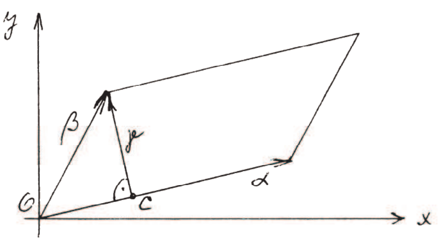
Vaatleme teist järku determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

ja leiame talle geomeetrilise tõlgenduse. Selleks vaatleme determinandi (1) reavektoreid

$$\alpha = (a_1; a_2), \quad \beta = (b_1; b_2)$$

ning tõlgendame neid kui geomeetrilisi vektoreid, mis an antud oma koordinaatidega *xy*-tasandil. Ehitame vektoritele α ja β rööpküliku ning näitame, et determinandi D absoluutväärtus $|D|$ võrdub selle rööpküliku pindalaga.



Eeldame, et $\alpha \neq \theta$ ja vaatleme tekkinud rööpküliku kõrgusvektorit $\gamma = \overrightarrow{CO} + \beta$. Kuna vektorid α ja $\overrightarrow{CO}$ on paralleelsed ja $\alpha \neq \theta$, siis leidub selline arv *a*, et $\overrightarrow{CO} = a\alpha$ ehk $\gamma = \beta + a\alpha$.

Arvutame D^2, arvestades determinantide omadusi ($\det(A^T) = \det A$ ja $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$):

$$D^2 = D \cdot D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \beta \cdot \alpha & \beta \cdot \beta \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Liidame determinandi (2) teisele reale arvu *a* kordse esimese rea ja arvestame, et vektorite α ja γ ristseisu tõttu $\alpha \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha = 0$:

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ (\beta + a\alpha) \cdot \alpha & (\beta + a\alpha) \cdot \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \gamma \cdot \alpha & \gamma \cdot \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ 0 & \gamma \cdot \beta \end{vmatrix} = (\alpha \cdot \alpha)(\gamma \cdot \beta) = \|\alpha\|^2 (\gamma \cdot \beta + 0) =$$

$$= \|\alpha\|^2 (\gamma \cdot \beta + \gamma \cdot a\alpha) = \|\alpha\|^2 (\gamma \cdot (\beta + a\alpha)) =$$

$$= \|\alpha\|^2 (\gamma \cdot \gamma) = \|\alpha\|^2 \|\gamma\|^2 .$$

Võttes võrduse mõlemast poolest ruutjuure, saame $|D| = \|\alpha\| \cdot \|\gamma\|$, mis võrdub vektoritele α ja β ehitatud rööpküliku pindalaga. Sõnastame selle teoreemina:

Teoreem. Teist järku determinandi absoluutväärtus võrdub tema reavektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga.

§ 2. Kolmandat järku determinandi geomeetriline tõlgendus

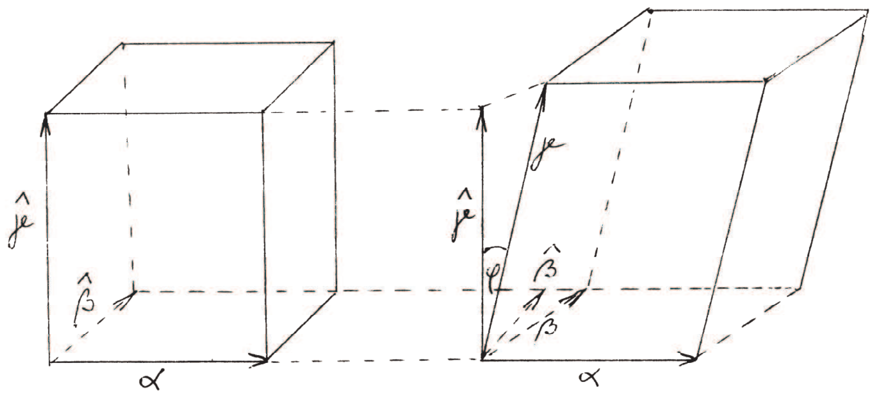
Kolmandat järku determinandi

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

geomeetrilise tähenduse saamiseks vaatleme tema reavektoreid

$$\alpha = (a_1 ; a_2 ; a_3), \quad \beta = (b_1 ; b_2 ; b_3), \quad \gamma = (c_1 ; c_2 ; c_3)$$

geomeetriliste vektoritena, mis on antud oma koordinaatidega *xyz*-teljestikus. Kanname vektorid α, β, γ ühte punkti ja ehitame nendele rööptahuka.



Näitame, et $|D|$ võrdub tekkinud rööptahuka ruumalaga *V*. Selleks konstrueerime risttahuka, mille ruumala on samuti *V*. Selle risttahuka külgvektoriteks valime vektorid $\alpha, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$, kus $\hat{\beta}$ on vektori β projektsioon vektori α ristsihile ja $\hat{\gamma}$ on vektori γ projektsioon vektoritega α ning β risti olevale sihile. Nii daadud risttahuka ruumala võrdub esialgse rööptahuka ruumalaga. Kuna vektor $\hat{\beta} - \beta$ on paralleelne vektoriga α ning vektor $\hat{\gamma} - \gamma$ on paralleelne tasandiga, millel asuvad vektorid α ja β, siis leiduvad sellised arvus *a*, *b*, *c*, et

$$\hat{\beta} - \beta = a\alpha , \quad \hat{\gamma} - \gamma = b\alpha + c\beta$$

ehk

$$\hat{\beta} = \beta + a\alpha , \quad \hat{\gamma} = \gamma + b\alpha + c\beta . \qquad (1)$$

Nüüd arvutame sarnaselt eelmise paragrahviga determinandi *D* ruudu:

$$D^2 = D \cdot D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta & \alpha \cdot \gamma \\ \beta \cdot \alpha & \beta \cdot \beta & \beta \cdot \gamma \\ \gamma \cdot \alpha & \gamma \cdot \beta & \gamma \cdot \gamma \end{vmatrix} .$$

Liidame selle determinandi kolmandale reale arvu *b* kordse esimese rea ja arvu *c* kordse teise rea ning teisele reale arvu *a* kordse esimese rea. Seoste (1) tõttu saame

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma \\ \hat\beta\cdot\alpha & \hat\beta\cdot\beta & \hat\beta\cdot\gamma \\ \hat\gamma\cdot\alpha & \hat\gamma\cdot\beta & \hat\gamma\cdot\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma \\ 0 & \hat\beta\cdot\beta & \hat\beta\cdot\gamma \\ 0 & 0 & \hat\gamma\cdot\gamma \end{vmatrix} = (\alpha\cdot\alpha)(\hat\beta\cdot\beta)(\hat\gamma\cdot\gamma),$$

sest

$$\hat\beta \perp \alpha, \quad \hat\gamma \perp \alpha, \quad \hat\gamma \perp \beta \quad \text{ehk} \quad \hat\beta\cdot\alpha = \hat\gamma\cdot\alpha = \hat\gamma\cdot\beta = 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} D^2 &= (\alpha\cdot\alpha)(\hat\beta\cdot\beta)(\hat\gamma\cdot\gamma) = \\ &= (\alpha\cdot\alpha)(\hat\beta\cdot\beta + 0)(\hat\gamma\cdot\gamma + 0 + 0) = \\ &= (\alpha\cdot\alpha)\left(\hat\beta\cdot\beta + \hat\beta\cdot(a\alpha)\right)\left(\hat\gamma\cdot\gamma + \hat\gamma\cdot(b\alpha) + \hat\gamma\cdot(c\beta)\right) = \\ &= (\alpha\cdot\alpha)(\hat\beta\cdot\hat\beta)(\hat\gamma\cdot\hat\gamma) = \|\alpha\|^2\,\|\hat\beta\|^2\,\|\hat\gamma\|^2 \end{aligned}$$

ja

$$|D| = \|\alpha\|\cdot\|\hat\beta\|\cdot\|\hat\gamma\|. \tag{2}$$

Avaldise (2) parem pool võrdub vaadeldava risttahuka ruumalaga ja seega ka esialgse rööptahuka ruumalaga. Oleme saanud teoreemi:

Teoreem. Kolmandat järku determinandi absoluutväärtus võrdub tema reavektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga.

§ 3. Vektorkorrutis

Vaatleme kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis vektoreid

$$\alpha = (a_1; a_2; a_3), \quad \beta = (b_1; b_2; b_3),$$

mis on antud koordinaatidega *xyz*-teljestikus.

Def. 1. Vektorite α ja β **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\alpha\times\beta$, mis on määratud võrdusega

$$\boxed{\alpha\times\beta = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)}\,. \tag{1}$$

Tähistades koordinaattelgede suunalisi ühikvektoreid vastavalt $\vec i$, $\vec j$ ja $\vec k$, on avaldis (1) esitatav kujul

$$\begin{aligned} \alpha\times\beta &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec k = \\ &= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

(sest kasutati viimase kolmandat järku determinandi arendist esimese rea järgi). Võrdust (2) on sobiv kasutada vektorkorrutise arvutamiseks.

Vektor- ja skalaarkorrutise abil on esitatav kolmandat järku determinandi arvutamise eeskiri. Determinandi

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

mille reavektorid on

$$\alpha = (a_1; a_2; a_3), \quad \beta = (b_1; b_2; b_3), \quad \gamma = (c_1; c_2; c_3),$$

väärtuse arvutamiseks arendame selle determinandi kolmanda rea järgi ja kasutame seejärel vektor- ja skalaarkorrutise definitsiooni:

$$D = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \gamma \cdot (\alpha \times \beta) = (\alpha \times \beta) \cdot \gamma$$

ehk

$$D = (\alpha \times \beta) \cdot \gamma . \qquad (3)$$

Teoreem. Vektorkorrutis $\alpha \times \beta$ on risti mõlema teguriga α ja β. Vektorkorrutise $\alpha \times \beta$ pikkus $\|\alpha \times \beta\|$ on arvuliselt võrdne vektoritele α ja β ehitatud rööpküliku pindalaga.

Tõestus. Vaatleme vektorite $\alpha = (a_1; a_2; a_3)$ ja $\beta = (b_1; b_2; b_3)$ vektorkorrutist $\alpha \times \beta$. Võrduse (3) kohaselt

$$(\alpha \times \beta) \cdot \alpha = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

(selle determinandi väärtus võrdub nulliga, sest ta sisaldab kaks võrdsete elementidega rida). Seega saime, et $(\alpha \times \beta) \cdot \alpha = 0$. See aga tähendab, et vektorid $\alpha \times \beta$ ja α on risti. Analoogselt põhjendatakse vektorite $\alpha \times \beta$ ja β ristseis.

Teoreemi teise väite tõestuseks kasutame kolmandat järku determinandi geomeetrilist tähendust:

$$V = |D| = |(\alpha \times \beta) \cdot \gamma| = \|\alpha \times \beta\| \cdot \|\gamma\| |\cos \varphi|,$$

kus V on vektoritele α, β, γ ehitatud rööptahuka ruumala ning φ on vektorite $\alpha \times \beta$ ja γ vaheline nurk. Selle rööptahuka kõrgus h on aga $\|\gamma\| |\cos \varphi|$ (vt. eelmist joonist ja arvestada, et vektor $\hat{\gamma}$ on paralleelne vektoriga $\alpha \times \beta$). Seega $V = \|\alpha \times \beta\| \cdot h$. Siit järeldub, et arv $\|\alpha \times \beta\|$ võrdub vaadeldava rööptahuka põhja pindalaga. See on samaväärne teoreemi teise väitega.

Järeldus. Vektorkorrutis $\alpha \times \beta$ võrdub nullvektoriga parajasti siis, kui vektorid α ja β on kollineaarsed.

Ütleme tõestuseta, et vektorid α, β ja $\alpha \times \beta$ moodustavad nn. **parema käe kolmiku** (vektori $\alpha \times \beta$ suunda saab määrata ka nn. **kruvireegliga**).

Eeltoodu põhjal saab vektorkorrutisele anda teise definitsiooni:

Def. 2. Vektorite α ja β **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\alpha \times \beta$, mis on risti vektoritega α ja β, mille pikkus ühtib vektoritele α ja β ehitatud rööpküliku pindalaga ning mille suund on antud kruvireegliga.

Selles definitsioonis pole vaja teada vektorite α ja β koordinaate. Ühtlasi näitab see, et definitsiooniga 2 määratud vektor $\alpha \times \beta$ ei sõltu teljestiku valikust vaadeldavas kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis.

Def. 3. Kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi vektorite α, β ja γ **segakorrutiseks** nimetatakse vektorite α ja β vektorkorrutise $\alpha \times \beta$ skalaarkorrutist vektoriga γ, s.t. arvu $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma$.

Paragrahvis 2 toodud teoreemi ja võrduse (3) tõttu on vektorite α, β ja γ segakorrutise absoluutväärtus võrdne nendele vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga. Valem (3) annab eeskirja segakorrutise arvutamiseks.

Peale rööptahuka ruumala arvutamise võib segakorrutist kasutada ka kahe mitteparalleelse sirge vahelise kauguse arvutamiseks kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis.